

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ОСНОВИ ТЕОРІЇ АВТОРЕГУЛЮВАННЯ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 171 «Електроніка»,
освітньою програмою «Електронні компоненти і системи»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Основи теорії авторегулювання: [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні компоненти і системи» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Миколаєць Д.А., Клен К.С., Ямненко Ю.С. – Електронні текстові данні (1 файл: 5918 кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 216 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №10 від 18.06.2020 р.)
за поданням Вченої ради факультету (протокол №05/2020 від 25.05.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ОСНОВИ ТЕОРІЇ АВТОРЕГУЛЮВАННЯ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Укладачі: *Миколаєць Дмитро Анаталійович, канд. техн. наук, доц.
Клен Катерина Сергіївна, канд. техн. наук, доц.
Ямненко Юлія Сергіївна, д-р техн. наук, проф.*

Відповідальний
редактор *Терещенко Т.О., проф. каф. ЕПС, д-р техн. наук, проф.*

Рецензенти: *Найда С.А., в.о. зав. каф. АМЕС, д-р техн. наук, проф.*

Видання присвячене вивченню основних принципів розрахунку замкнених систем автоматичного керування. Викладені основи опису замкнених неперервних, дискретних та нелінійних систем і методів їх розрахунку. Розглянуте питання дослідження стійкості як в лінійних, так і в імпульсних системах. Конспект містить інформацію по 27 лекціям, згідно робочої навчальної програми дисципліни. Посібник підготовлений на кафедрі "Електронні пристрої та системи" і призначений для студентів спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні компоненти і системи».

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ	6
--------------------------------	----------

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ СИСТЕМИ

Тема 1.1. Алгоритми і принципи керування. Математичний опис систем автоматичного регулювання. Процес керування та вимоги до нього

Лекція 1 Вступ. Класифікація систем автоматичного регулювання	7
Лекція 2. Математичний опис систем автоматичного регулювання. Операторна передаточна функція та її зв'язок з часовими характеристиками. Частотні характеристики ланок та систем	15
Лекція 3. Структурні схеми систем автоматичного регулювання та їх перетворення. Передаточні функції та рівняння замкненої системи.....	39
Лекція 4. Процес керування і вимоги до нього. Постійні помилки. Астатичні ланки і системи. Закони регулювання при реалізації принципу керування по відхиленню	48

Тема 1.2. Стійкість лінійних систем автоматичного регулювання

Лекція 5. Поняття стійкості лінійних систем. Необхідна умова стійкості. Алгебраїчні критерії стійкості: Рауса, Гурвіца, Л'єнара-Шипара	57
Лекція 6. Частотний критерій Михайлова. Критерій стійкості Найквіста. Особливості дослідження стійкості астатичних систем	65
Лекція 7. Логарифмічний критерій дослідження стійкості (критерій Боде). Системи з запізнюванням. Дослідження стійкості систем з запізнюванням.....	72

Тема 1.3. Оцінка якості процесу керування. Підвищення точності систем автоматичного регулювання

Лекція 8. Оцінки якості перехідного процесу. Частотні оцінки якості: запас стійкості за амплітудою та фазою, показник коливальності	77
Лекція 9. Кореневі оцінки якості: степінь стійкості, коливальність, діаграма Вишнеградського. Інтегральні оцінки якості	83

Лекція 10. Види коригувальних пристроїв. Послідовні коригувальні пристрої. Паралельні коригувальні пристрої. Коригувальні пристрої по зовнішньому впливу..... 89

Лекція 11. Частотний метод синтезу коригувальних пристроїв. Синтез послідовного коригувального пристрою, Синтез паралельного коригувального пристрою 102

Тема 1.4. Багатовимірні системи. Інваріантність багатовимірних систем

Лекція 12. Теорія інваріантності і комбіноване керування. Багатовимірні системи. Керованість, спостережувачість, стабілізованість. Інваріантність багатовимірних систем 110

РОЗДІЛ 2. ІМПУЛЬСНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Тема 2.1. Поняття про дискретні системи. Математичний опис імпульсних систем

Лекція 13. Поняття про дискретні системи. Види та роди Імпульсної модуляції. Складання різницевих рівнянь 125

Лекція 14. Поняття про решітчасті функції. Дискретне перетворення Лапласа та його властивості. Обернене дискретне перетворення Лапласа 131

Лекція 15. Розв'язок різницевих рівнянь. Зв'язок між неперервним та дискретним перетвореннями Лапласа. Властивості дискретного перетворення Лапласа. Обернене дискретне перетворення Лапласа. Обернене перетворення для зміщених функцій. Імпульсний елемент і його рівняння..... 136

Лекція 16. Властивості найпростішого імпульсного елементу. Рівняння розімкнених імпульсних систем. Рівняння замкнених імпульсних систем. Перехідні і сталі процеси в імпульсних системах. Частотні характеристики імпульсних систем..... 143

Тема 2.2. Аналіз стійкості лінійних імпульсних систем

Лекція 17. Дослідження стійкості імпульсних систем. Аналог критерію Гурвіца. Аналог критерію Рауса (теорема Шура)..... 154

Лекція 18. Дослідження стійкості Імпульсних систем Аналог критерію Михайлова. Аналог критерію Найквіста	159
---	-----

РОЗДІЛ 3. НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

Тема 3.1. Типові нелінійності. Основні методи аналізу нелінійних систем

Лекція 19. Нелінійні системи. Статичні та динамічні нелінійності. Метод припасовування. Фазовий простір. Фазова площина	164
---	-----

Лекція 20. Характер процесів в нелінійних системах. Поняття про стан рівноваги та автоколивання.....	171
--	-----

Тема 3.2. Стійкість нелінійних систем. Теорема Ляпунова

Лекція 21. Стійкість нелінійних систем. Перший метод Ляпунова. Лінеаризація нелінійних систем «у малому»	174
--	-----

Лекція 22. Функції Ляпунова. Прямий (другий) метод Ляпунова. Теорема Ляпунова.....	180
--	-----

Лекція 23. Частотна теорема. Критерій В.М. Попова	186
---	-----

Тема 3.3. Дослідження періодичних режимів в нелінійних системах

Лекція 24. Метод гармонічної лінеаризації: основні положення. Симетричні коливання. Несиметричні коливання. Гармонічна лінеаризація деяких типів нелінійностей	191
--	-----

Лекція 25. Алгебраїчний спосіб визначення параметрів автоколивань та їх стійкості.....	201
--	-----

Лекція 26. Дослідження режиму несиметричних коливань	207
--	-----

Лекція 27. Частотний спосіб визначення симетричних коливань (метод гармонічного балансу). Одночастотні вимушені коливання	211
---	-----

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛАТЕРАТУРИ	216
---	------------

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АФЧХ – амплітудно-фазова частотна характеристика ланки

АЧХ – амплітудна частотна характеристика ланки

ЗЗ – зворотний зв'язок

ІСАР – імпульсна система автоматичного регулювання

ПІ-регулятор – пропорційно-інтегруючий регулятор

ПД-регулятор – пропорційно-диференціюючий регулятор

ПІД-регулятор – пропорційно-інтегруючий-диференціюючий регулятор

САР – система автоматичного регулювання

ФЧХ – фазова частотна характеристика ланки

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ СИСТЕМИ

Тема 1.1. Алгоритми і принципи керування. Математичний опис САР. Процес керування та вимоги до нього

Лекція 1 Вступ. Класифікація систем автоматичного регулювання (САР)

ВСТУП

Об'єктом вивчення в теорії автоматичного керування і регулювання є автоматичні системи, які протягом заданого тривалого часу належним чином змінюють або підтримують незмінними деякі фізичні величини.

Система автоматичного регулювання (САР) складається з двох частин:

1. Об'єкта керування чи регулювання, у якому відбувається процес, що підлягає керуванню чи регулюванню;
2. Регулятора, що виконує функції вимірювання відхилення регульованої величини і перетворення її в регулюючий вплив на об'єкт, за допомогою якого підтримується заданий стан об'єкта.

Системи автоматичного керування і регулювання класифікуються за наступними критеріями:

1. Неперервність або дискретність процесів у часі – по цьому критерію розрізняють неперервні, дискретні або релейні САР;
2. Лінійність або нелінійність рівнянь динаміки – нелінійні та лінійні САР. Релейні САР відносяться до нелінійних.

Неперервні САР – в кожній ланці вихідна та вхідна величини є неперервними у часі (рис. 1.1).

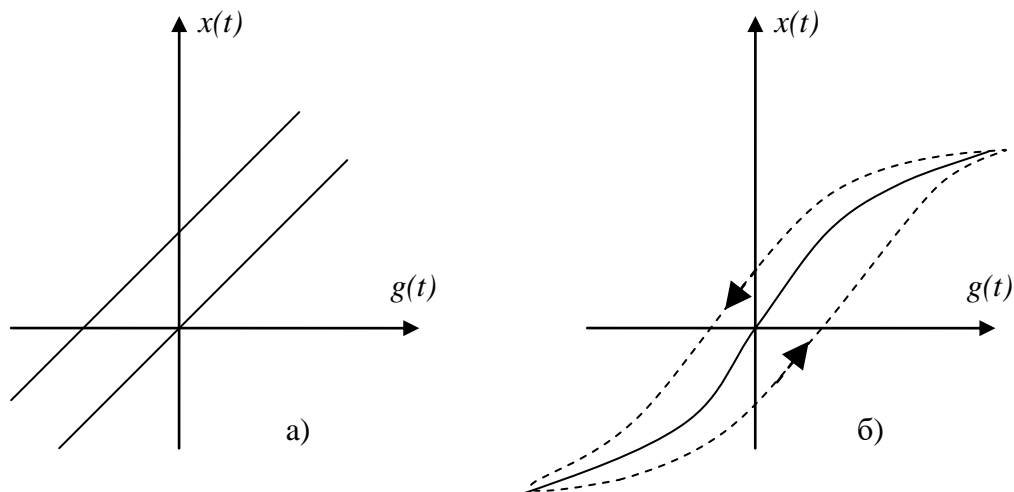


Рис. 1.1. Неперервні САР

а – неперервна лінійна ланка; б – неперервна нелінійна ланка

Дискретні САР – хоча б в одній ланці при неперервному входному впливі $g(t)$ вихідний сигнал $x(t)$ має вигляд окремих імпульсів, наприклад, ланка, що перетворює неперервну величину у послідовність дискретних імпульсів (рис. 1.2).

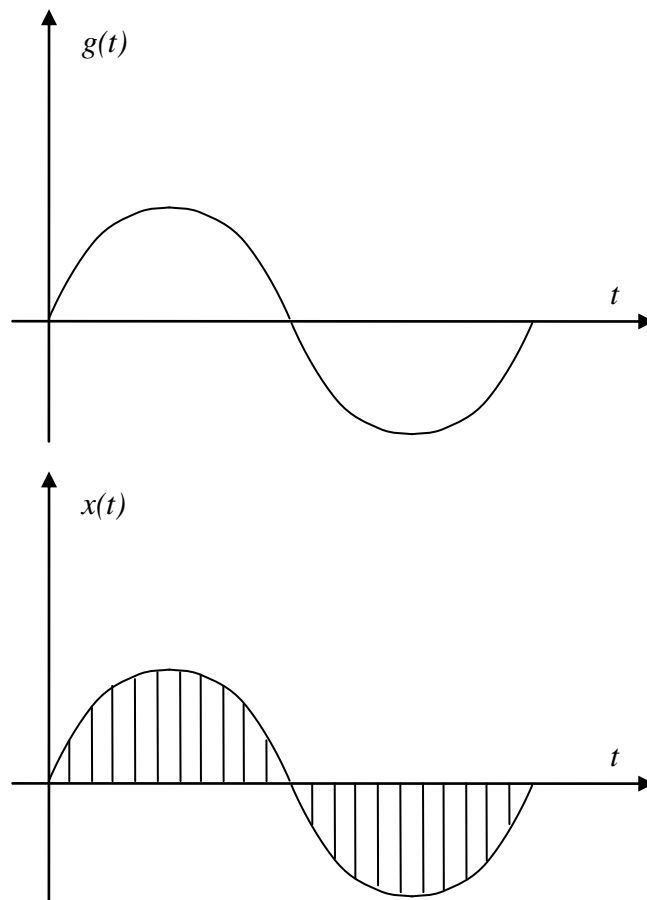


Рис. 1.2.

Якщо наступна ланка теж дискретна, то для неї і $g(t)$, і $x(t)$ є дискретними (імпульсними).

Релейна САР – хоча б в одній ланці при неперервному $g(t)$ вихідна величина $x(t)$ в деяких точках, що залежать від значення $g(t)$, змінюється стрибкоподібно (рис. 1.3).

Якщо динаміка процесів описується лінійними диференціальними рівняннями та лінійними алгебраїчними рівняннями з постійними коефіцієнтами, така система називається САР з постійними параметрами.

Якщо у рівнянні деякої ланки системи є хоча б один змінний у часі коефіцієнт, така система називається САР зі змінними параметрами.

Якщо деяка ланка описується диференціальними рівняннями у часткових похідних, така система називається САР з розподіленими параметрами.

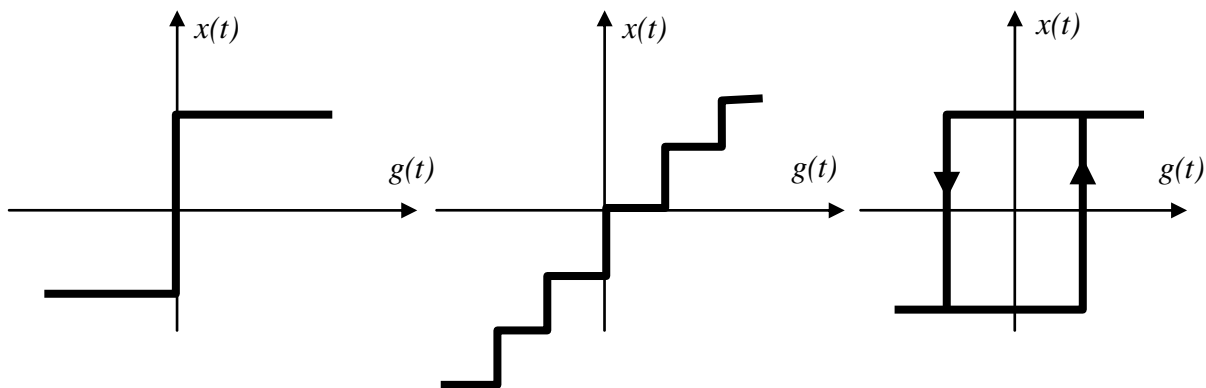


Рис. 1.3.

Лінійна САР – всі ланки описуються лінійними рівняннями.

Якщо деяка ланка описується рівняннями з аргументом, що запізнюється (тобто ланка має часову затримку τ передавання сигналу), така система називається САР з запізненням (рис. 1.4).

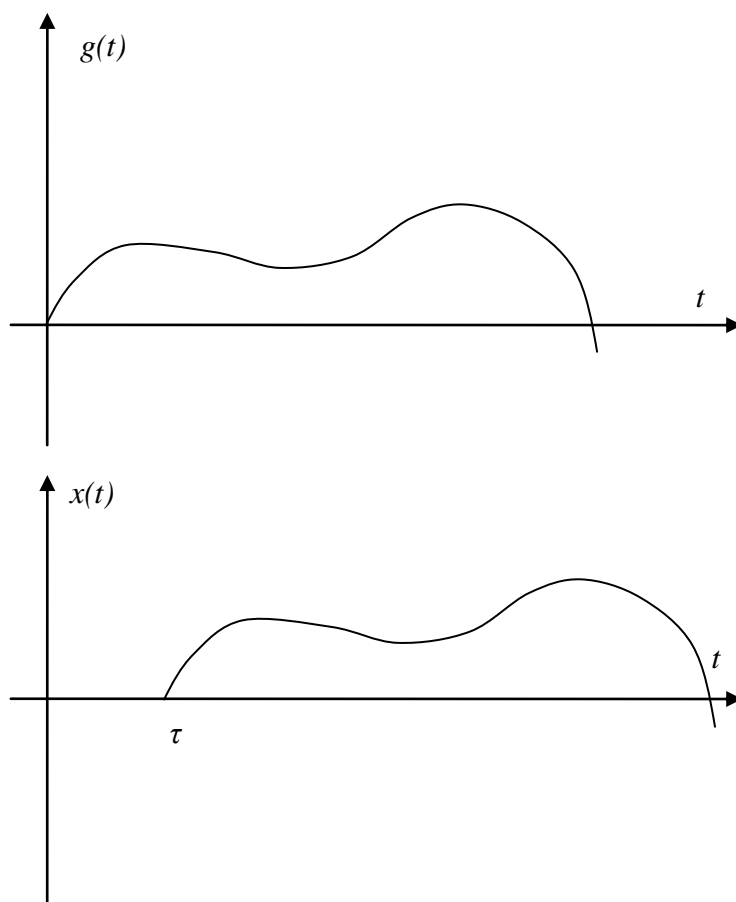


Рис. 1.4.

Якщо динаміка деякої ланки описується різницеvim рівнянням, така система називається дискретною САР.

По характеру процесів керування розрізняють САР детерміновані (визначені параметри і процеси) і стохастичні (випадкові процеси).

За принципом побудови розрізняють:

1. Жорсткі САР (системи з жорсткою логікою керування та жорсткою структурою).
2. Адаптивні системи (логіка керування та структура системи підлаштовуються в процесі роботи).
3. Термінальні системи – САР, які досягають заданого стану за кінцевих проміжків часу.
4. Оптимальні системи.

Основні задачі теорії автоматичного регулювання і керування:

1. Задача аналізу – аналіз процесів у системі, аналіз вхідних та вихідних сигналів.
2. Задача синтезу, яка поділяється на:
 - 2.1 Задача структурного синтезу – побудова системи із заданими параметрами за заданими умовами;
 - 2.2 Задача синтезу впливу – формування керуючих сигналів для забезпечення заданих властивостей системи.

ПРИНЦИПИ КЕРУВАННЯ

У техніці використовуються три фундаментальних принципи:

1. Принцип розімкненого керування;
2. Принцип компенсації (керування за збуренням);
3. Принцип зворотного зв'язку (керування за відхиленням).

Принцип розімкненого керування полягає в тому, що алгоритм керування заданий заздалегідь і не контролюється збуреннями чи вихідними координатами. Структурна схема САР з принципом розімкненого керування наведена на рис. 1.5.

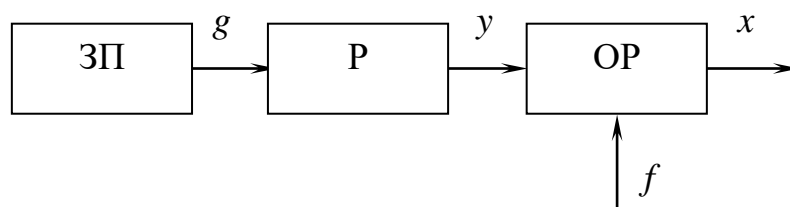


Рис. 1.5. Структурна схема САР з принципом розімкненого керування
ЗП – задавальний пристрій; Р – регулятор; ОР – об'єкт регулювання; g – задавальний вектор станів пристрою; y – вектор станів регулятора; f – збурення; x – вектор станів об'єкта регулювання (вихідна величина)

У такій системі контроль за фактичним станом об'єкта регулювання не здійснюється, тому що близькість до бажаної поведінки системи забезпечується тільки точністю всіх елементів системи і відповідним вибором задавального вектора станів. Прикладом такої системи є параметричний стабілізатор напруги на стабілітроні. По розімкненому принципу побудовані пристрої пуску, лінійні підсилювачі, перетворювачі та ін.

Для компенсації відхилення x , що відбувається за рахунок появи збурень застосовують принцип компенсації та принцип зворотного зв'язку.

Принцип компенсації полягає в перетворенні збурення у величину того ж характеру, що і задавальний вплив, і зміні вектора-регулятора таким чином, щоби здійснювалася повна компенсація збурення. Для цього вводиться канал компенсації КК.

Структурна схема САР з принципом компенсації наведена на рис. 1.6.

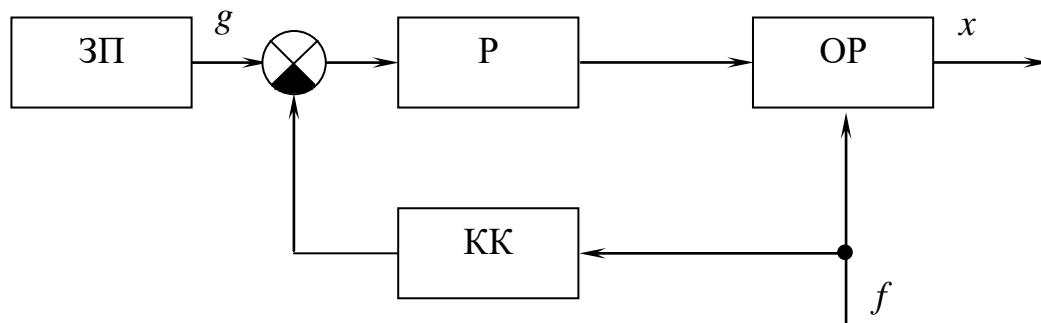


Рис. 1.6.

Перевагою принципу компенсації є можливість досягти інваріантності по збуренню. Недоліком є те, що відхилення вхідної величини від заданого значення може бути викликаною впливом інших збурень.

Принцип компенсації використовується в системах стабілізації змінних стану об'єкта регулювання (струму, напруги, сили звуку, положення в просторі, тощо) в умовах збурень (зміна струму навантаження, напруга мережі, тощо).

У статичному режимі для систем стабілізації існують наступні типи залежностей вихідної величини $x(t)$ від величини збурення f (рис. 1.7):

- 1) перекомпенсація;
- 2) інваріантність – властивість системи, в якій збурення не впливає на вихідну величину;
- 3) недокомпенсація;
- 4) нелінійна залежність.

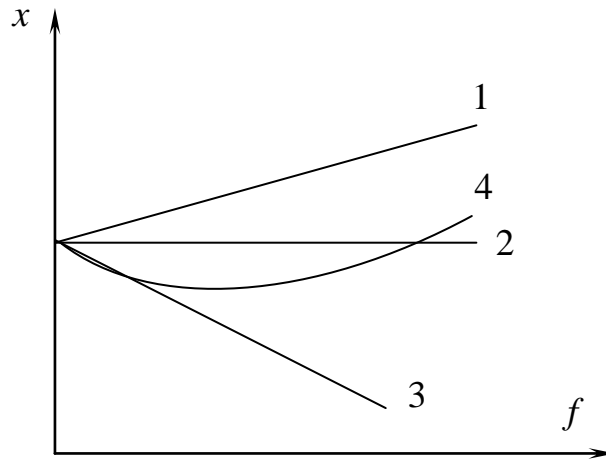


Рис. 1.7.

Принцип керування по відхиленню полягає в тому, що вихідна величина вимірюється, і порівнюється з задавальним впливом. У результаті виділяється деяке відхилення (сигнал неузгодженості ε , рис. 1.8), що перетворюється у вектор регулювання y , який впливає на ОР таким чином, щоби зменшити зміну x .

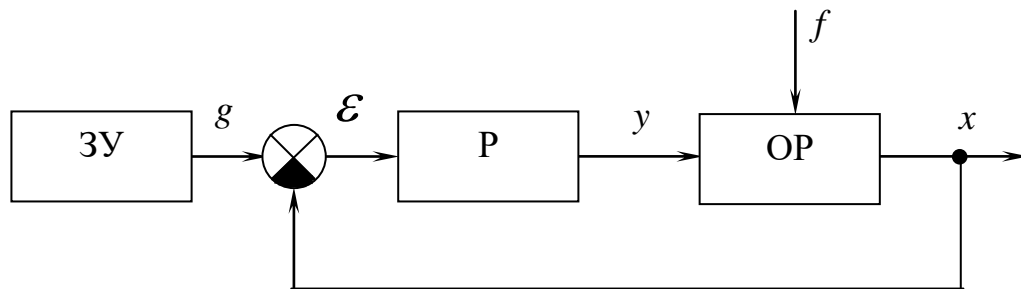


Рис. 1.8.

У системі автоматичного регулювання для реалізації керування по відхиленню вводять зворотний зв'язок на відміну від принципу компенсації, в якому немає зворотного зв'язку, і вихідна величина не надходить на вхід схеми.

Переваги принципу зворотного зв'язку:

- 1) відхилення x зменшується незалежно від того, якими факторами воно викликане;
- 2) менша чутливість до зміни параметрів елементів схеми в порівнянні з розімкненими системами;
- 3) принцип можна застосовувати до об'єктів, характеристики яких невідомі – бажано знати характеристики об'єкту, але не обов'язкове детальне і точне знання всіх характеристик, більш принциповою є умова можливості керування, тобто керованості об'єкту керування;
- 4) технічно легше реалізовується в порівнянні з розімкненими системами, де необхідний точний попередній розрахунок всіх параметрів,

характеристик та сигналів, їх узгодження між собою, а також підлаштування параметрів в процесі роботи.

Недоліки:

- 1) у простих одноконтурних системах не можна добитися повної інваріантості;
- 2) для систем із зворотними зв'язками характерна проблема стійкості.

Застосування комбінованого регулювання по збуренню та відхиленню підвищує ефективність регулювання. Комбіновані регулятори поєднують переваги обох принципів – швидкість реакції на зміну збурення і точне регулювання незалежно від причини, що викликала відхилення.

ТИПОВІ КЕРУЮЧІ ВПЛИВИ

При аналізі роботи САР або її окремих ланок розглядають типові тестові функції, у якості типових використовують одне з наступних збурень:

1. Вплив у вигляді одиничної східчастої функції (рис. 1.9,а).

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Зображення по Лапласу функції $g(t)$ має вигляд:

$$L\{g(t)\} = 1/p.$$

Розглядають також одиничну східчасту функцію із запізненням (рис. 1.9,б):

$$g(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases} \quad (1.2)$$

Зображення по Лапласу:

$$L\{g(t - \tau)\} = \frac{1}{p} e^{-p\tau}.$$

Одинична функція використовується при дослідженні пускових режимів, скиданнях і накидах навантаження.

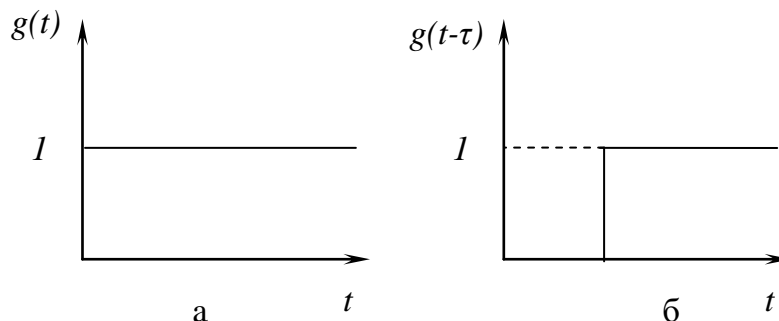


Рис. 1.9. Тестові функції

а) одинична східчаста функція; б) одинична східчаста функція із запізненням

2. Гармонічний вплив

$$g(t) = A \sin(\omega t),$$

$$L\{g(t)\} = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (1.3)$$

Використовується для дослідження автоматичних систем у режимі незгасаючих коливань.

3. Поліноміальний вплив

$$g(t) = g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots + g_n t^n,$$

$$L\{g(t)\} = \frac{g_0}{p} + \frac{g_1}{p^2} + \frac{2g_2}{p^3} + \dots + \frac{g_n n!}{p^{n+1}} \quad (1.4)$$

Поліноміальна функція використовується для оцінки похибок від степеневих функцій. Найбільш часто використовують стрибок швидкості і стрибок прискорення, які є стандартними у режимі постійної швидкості $g(t) = g_1 t$ або постійного прискорення $g(t) = g_2 t_0^2$.

4. Вплив у вигляді δ -функції.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (1.5)$$

$$\Delta t \rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty$$

де h та Δt – амплітуда та тривалість імпульсу відповідно.

Для зсуненої δ -функції (рис.10)

$$g(t) = \delta(t - \tau)$$

справедлива умова $\int_a^b \delta(t - \tau) dt = 1$.

Зображення по Лапласу:

$$L\{g(t - \tau)\} = e^{-p\tau},$$

$$L\{g(t)\} = 1$$

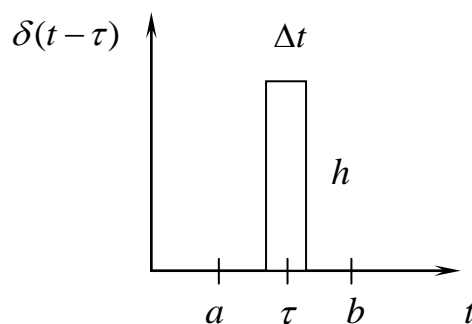


Рис. 1.10

**Лекція 2. Математичний опис систем автоматичного регулювання.
Операторна передаточна функція та її зв'язок з часовими
характеристиками. Частотні характеристики ланок та систем**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО
РЕГУЛЮВАННЯ**

На певному етапі розробки та дослідження автоматичної системи керування одержують її математичний опис. Математичний опис може бути аналітичним (за допомогою рівнянь), графічним (за допомогою графіків, структурних схем і графів) або табличним (за допомогою таблиць). Для одержання математичного опису системи, звичайно складають опис її окремих елементів. Сукупність усіх рівнянь її елементів і дає рівняння системи.

Рівняння (а також структурні схеми) автоматичної системи керування називають її *математичною моделлю*. Математична модель однієї і тієї ж системи в залежності від мети дослідження може бути різною. Більш того, іноді корисно при рішенні однієї і тієї ж задачі на різних етапах приймати різну математичну модель: почати дослідження з найпростішої моделі, а потім її поступово ускладнювати, для того щоб урахувати додаткові явища і зв'язки, що на початковому етапі були відкинуті як неістотні. Сказане обумовлюється тим, що до математичної моделі пред'являються суперечливі вимоги: вона повинна, з одного боку, як можна повніше відбивати властивості оригіналу, а з іншого боку, бути по можливості простою, щоб не ускладнювати дослідження. Щоб скласти рівняння динаміки САР система розбивається на ланки. Потім розглядається кожна ланка системи окремо. Тип ланки визначається рівнянням у відповідності до якого відбувається перетворення вхідного впливу. Розрізняють наступні типи елементарних динамічних ланок: пропорційна (підсилювальна), аперіодична, коливальна, інтегруюча і диференціююча.

Кожна динамічна ланка має наступні динамічні характеристики: рівняння динаміки, передаточну функцію, вагову (імпульсну перехідну) і перехідну функції, частотні характеристики. Такими ж динамічними характеристиками описуються і властивості САР.

Рівняння динаміки ланки (системи) – це рівняння, яке визначає залежність вихідної величини ланки (системи) $x(t)$ від вхідної величини $g(t)$ (рис. 2.1). Рівняння динаміки може бути записане в диференційній або операторній формі.



Рис. 2.1.

Припустимо, що в результаті складання рівняння динаміки якої-небудь конкретної ланки вийшло наступне лінійне диференційне рівняння другого порядку:

$$a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_1 \frac{dg(t)}{dt} + b_0 g(t)$$

У теорії автоматичного регулювання прийнято приводити рівняння ланки до стандартного вигляду:

$$T_2^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k_1 \left[\tau_1 \frac{dg(t)}{dt} + g(t) \right],$$

де $T_2^2 = a_2/a_0$; $T_1 = a_1/a_0$; $\tau_1 = b_1/b_0$ - сталі часу; $k_1 = b_0/a_0$ - коефіцієнт підсилення ланки.

Передаточна функція ланки $W(p)$ – це відношення зображень по Лапласу вихідної і вхідної величин:

$$W(p) = X(p)/G(p), \quad (2.1)$$

де $X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-pt} dt$; $G(p) = L\{g(t)\}$.

Застосувавши перетворення Лапласа до диференційного рівняння ланки при нульових початкових умовах, одержимо

$$p^2 T_2^2 X(p) + p T_1 X(p) + X(p) = k_1 [p \tau_1 G(p) + G(p)].$$

Тоді передаточна функція ланки має вигляд:

$$W(p) = \frac{k_1(\tau_1 p + 1)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (2.2)$$

Порівнюючи отриманий вираз з диференційним рівнянням ланки, можна помітити, що формально передаточну функцію ланки можна записати як відношення операторних багаточленів правої і лівої частин рівняння ланки. І навпаки, якщо відома передаточна функція $W(p)$, легко записати диференційне рівняння, маючи на увазі те, що чисельник $W(p)$ відповідає правій частини, а знаменник – лівій частині диференційного рівняння.

У загальному випадку процеси в САК можуть бути описані наступними диференційними рівняннями:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{dx^i(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i g(t)}{dt^i}. \quad (2.3)$$

Надалі будемо розглядати САК з постійними параметрами (постійними коефіцієнтами диференційних рівнянь).

Застосувавши до лівої і правої частин диференційного рівняння перетворення Лапласа при нульових початкових умовах одержимо

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i X(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i G(p).$$

Передаточна функція буде мати вигляд:

$$W(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (2.4)$$

де $B(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i$; $A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i$.

Якщо ввести багаточлени $\tilde{B}(p)$ і $\tilde{A}(p)$ з коефіцієнтами 1 у молодших розрядах, то передаточна функція може бути зведена до стандартного вигляду

$$W(p) = \frac{k_1 \tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)}, \quad (2.5)$$

де $k_1 = b_0/a_0$. Функція $\tilde{A}(p)$ називається характеристичним поліномом ланки, а рівняння $\tilde{A}(p) = 0$ - її характеристичним рівнянням.

Якщо відомі передаточна функція ланки $W(p)$ і зображення вхідного впливу $G(p)$, то зображення вихідного сигналу ланки $X(p) = W(p)G(p)$ (рис. 2.2).

Вихідний сигнал як функцію часу можна знайти за допомогою оберненого перетворення Лапласа:

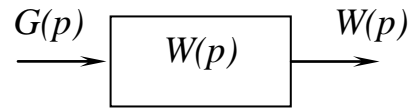


Рис. 2.2.

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(p) e^{pt} dp,$$

де σ – абсциса зходження, $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Звичайно для знаходження функції-оригіналу за відомим зображенням використовують формули лишків (формули розкладання):

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} \left[X(p) e^{pt} \right]_{p=p_i},$$

де n – кількість полюсів (особливих точок) функції $X(p)$, p_i – значення полюсів.

Ваговою (імпульсною перехідною) функцією ланки називається оригінал (тобто обернене перетворення Лапласа) передаточної функції

$$\varpi(t) = L^{-1}\{W(p)\}. \quad (2.6)$$

Оскільки при нульових початкових умовах $X(p) = W(p)G(p)$, то $x(t) = \varpi(t)$ в тому випадку, якщо $G(p) = 1$, тобто якщо $g(t) = \delta(t)$ ($L\{\delta(t)\} = 1$). Таким чином, фізичний зміст вагової функції ланки $\varpi(t)$ – реакція ланки на δ -імпульс.

Якщо відома вагова функцію ланки $\varpi(t)$ можна визначити її передаточну функцію:

$$W(p) = L\{\varpi(t)\}. \quad (2.7)$$

Перехідною функцією ланки $h(t)$ називається реакція ланки на одиничний східчастий вплив, тобто перехідний процес на виході ланки, коли $g(t) = 1(t)$.

Тоді

$$G(p) = L\{l(t)\} = 1/p; \quad X(p) = W(p)G(p) = W(p)/p;$$

$$h(t) = x(t) = L^{-1}\{W(p)/p\}. \quad (2.8)$$

Оскільки для узагальнених функцій $\delta(t) = \frac{dl(t)}{dt}$, то одержуємо наступний зв'язок між ваговою і перехідною функціями ланки:

$$\varpi(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (2.9)$$

ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Частотними характеристиками називаються формули і графіки, що характеризують реакцію ланки на синусоїдальний вхідний вплив з одиничною амплітудою в усталеному режимі, тобто вимушені синусоїдальні коливання ланки (рис. 2.3).

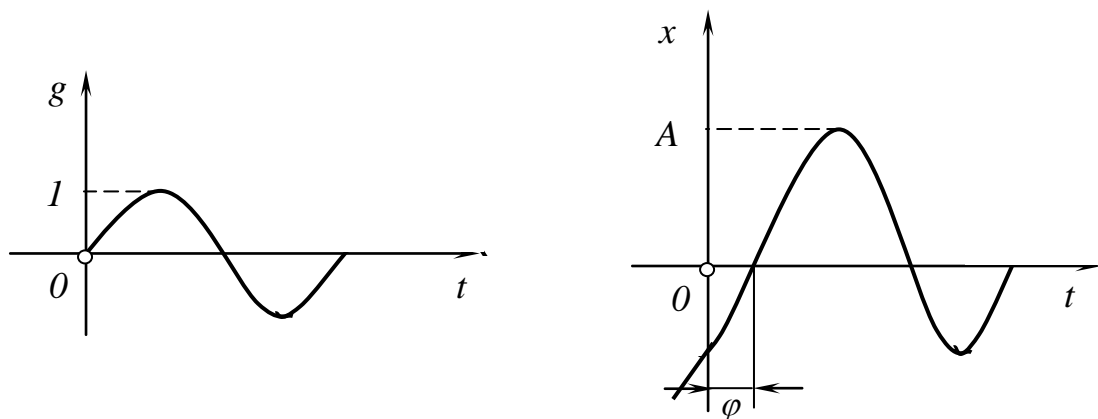


Рис. 2.3.

Якщо на вхід ланки подається сигнал:

$$g(t) = \sin \omega t,$$

то сигнал на виході в усталеному режимі визначатиметься виразом:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

де A - амплітуда або підсилення амплітуди, φ - зсув по фазі.

Для побудови частотних характеристик використовують передаточну функцію:

$$[W(p)]_{p=j\omega} = W(j\omega). \quad (2.10)$$

Звідси знаходимо

$$W(\omega) = W(j\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$W(\omega) = |W(j\omega)|, \quad (2.11)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega). \quad (2.12)$$

У загальному вигляді частотна передаточна функція має вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{k\tilde{B}(j\omega)}{\tilde{A}(j\omega)}.$$

Вираз (2.10) являє собою амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ) ланки. Іноді $W(j\omega)$ називають частотною передаточною функцією ланки. Вирази (2.11) та (2.12) називаються відповідно амплітудною частотною характеристикою (АЧХ) ланки і фазовою частотною характеристикою (ФЧХ) ланки.

Графічно амплітудно-фазова частотна характеристика зображується на комплексній площині в полярних координатах (W, φ) , як годограф функції $W(j\omega)$. Можна будувати амплітудно-фазову частотну характеристику й у прямокутних координатах (U, V) , виділивши у виразі $W(j\omega)$ дійсну і уявну частини

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (2.13)$$

звідки $W(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$.

При цьому частоту ω змінюють від 0 до ∞ (суцільна крива на рис. 2.4, а) або від $-\infty$ до $+\infty$, коли додається ще симетрична до неї пунктирна крива. Симетрія кривих при $\omega < 0$ і $\omega > 0$ пояснюється тим, що передаточна функція $W(p)$ є відношенням багаточленів (дрібно-раціональна функція). Тому $W(-j\omega) = W^*(j\omega)$, тобто $U(-\omega) = U(\omega)$, $V(-\omega) = -V(\omega)$, де $W^*(j\omega)$ - комплексно-сполучений вираз.

Амплітудна (2.5) і фазова (2.6) частотні характеристики графічно зображуються у координатах (W, ω) та (φ, ω) відповідно (рис. 2.4, б).



Рис. 2.4.

а) амплітудно-фазова частотна характеристика; б) амплітудна і фазова частотні характеристики

При визначенні $\varphi(\omega)$ необхідно враховувати, що

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg} V/U, & U \geq 0; \\ \operatorname{arctg} V/U + \pi, & U < 0, V \geq 0; \\ \operatorname{arctg} V/U - \pi, & U < 0, V < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

При побудові ФЧХ складних ланок і систем передаточну функцію доцільно зображати у вигляді добутку декількох більш простих

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)\dots W_n(j\omega).$$

Тоді $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$.

Логарифмічні частотні характеристики. Найчастіше амплітудну і фазову частотні характеристики зображують у логарифмічному масштабі.

При побудові *логарифмічної амплітудної частотної характеристики* (ЛАХ) по вісі ординат відкладають величину

$$L(\omega) = 20 \lg W(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|, \quad (2.15)$$

одиноцею виміру для якої є *децибел* (дБ) – одна десята частина бела. Бел є логарифмічною одиницею, що відповідає 10-кратному збільшенню потужності. 2 бели відповідають збільшенню потужності у 100 разів, 3 бели – у 1000 разів, тощо. Якщо б під знаком логарифму стояло відношення вихідної та вхідної потужностей, то перед логарифмом мав би стояти множник 10. Але оскільки $W(\omega)$ – це відношення не потужностей, а вихідної та вхідної величин системи (переміщень, швидкостей, напруг, струмів, тощо), то збільшення цього відношення у 10 разів відповідає збільшенню потужності у 100 разів, що дорівнює 2 белах або 20 децибелам, що і пояснює появу множника 20 у виразі (2.9).

При побудові логарифмічних характеристик по вісі абсцис відкладається частота ω [1/сек] в логарифмічному масштабі – степені 10. Рівномірною одиницею на вісі абсцис є *декада* – будь-який відрізок, на якому значення частоти збільшується в десять разів. Точка перетину ЛАХ з віссю абсцис називається *частотою зрізу* ω_z (рис. 3.3).

Початок координат звичайно розміщують у точці $\omega = 1$, тому що $\lg 1 = 0$. Точка $\omega = 0$ лежить в $-\infty$. Однак у залежності від потрібного діапазону частот можна початок координат обирати і в іншій точці $\omega = 0.1; \omega = 10; \dots$ (див. рис. 2.5).

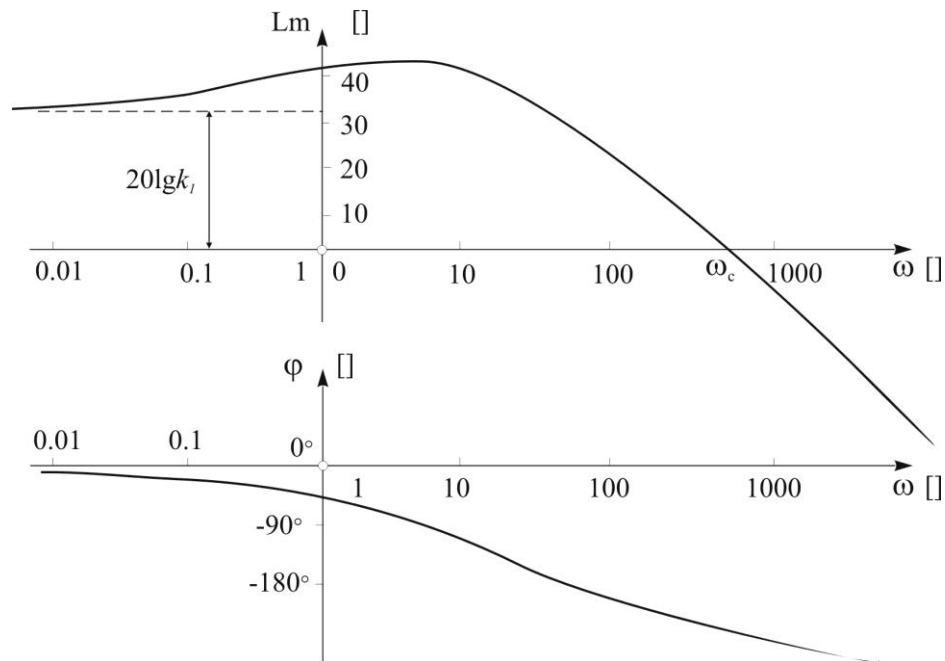


Рис. 2.5.

Важливо мати на увазі, що вісь абсцис ($L=0$) відповідає значенню $W(\omega) = 1$, тобто проходженню амплітуди сигналу через ланку без підсилення або ослаблення. Верхня півплощина ЛАХ відповідає значенням $W(\omega) > 1$ (посилення амплітуди), а нижня півплощина — значенням $W(\omega) < 1$ (ослаблення амплітуди).

При побудові *логарифмічної фазової частотної характеристики (ЛФХ)* відлік кутів φ йде по вісі ординат у звичайному масштабі у кутових градусах. По вісі абсцис відкладається частота ω в логарифмічному масштабі.

ТИПОВІ ЛАНКИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Типи ланок систем автоматичного керування і регулювання розрізняються по вигляду їх передаточних функцій (або диференційного рівняння), що визначає всі їхні динамічні властивості і характеристики.

Основні типи ланок поділяються на чотири групи: позиційні, диференціюючі, інтегруючі, ланки запізнення.

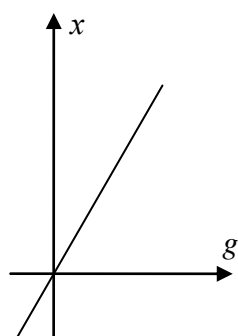


Рис. 2.6.

Позиційними ланками називаються такі, у передаточній функції яких $W(p) = \frac{k_1 \tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)}$ багаточлени $\tilde{B}(p)$ і $\tilde{A}(p)$ мають вільні члени, що дорівнюють 1, тобто ці ланки мають статичну характеристику $x = k_1 g$ при $p=0$, $\omega=0$ (рис. 2.6), що визначає їхній стан рівноваги (властивість позиційності).

У *диференціюючих ланок* відсутній вільний член чисельника, тобто передаточна функція однократно

диференціюючої ланки (диференціюючої ланки I-го порядку, або форсуючої ланки) має вигляд:

$$W(p) = \frac{k_1 p \tilde{B}_1(p)}{\tilde{A}(p)},$$

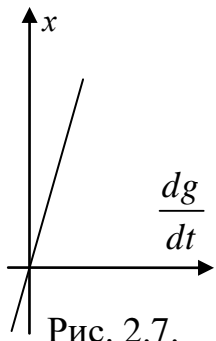


Рис. 2.7.

де $\tilde{B}_1(p)$ має вільний член, що дорівнює 1.

Для цієї ланки характерна лінійна залежність вихідної величини та похідної від вхідної величини (рис.2.7).

Ідеальна диференціююча ланка має передаточну функцію $W(p) = p$. Для двічі диференціюючої ланки:

$$W(p) = \frac{k_1 p^2 \tilde{B}_1(p)}{\tilde{A}(p)}.$$

Передаточна функція інтегруючої ланки I-го порядку має вигляд:

$$W(p) = \frac{k_1 \tilde{B}(p)}{p \tilde{A}_1(p)},$$

де $\tilde{A}_1(p)$ має вільний член, рівний 1. Така ланка характеризується лінійною залежністю між похідною вихідної величини та вхідною величиною (рис.2.8).

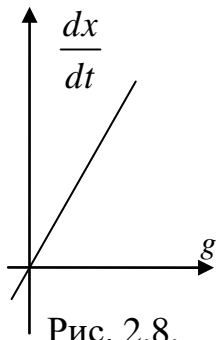


Рис. 2.8.

Ідеальна інтегруюча ланка має передаточну функцію

$$W(p) = \frac{1}{p}.$$

Розглянемо властивості основних типів позиційних ланок.

Ідеальна підсилювальна (безінерційна) ланка. Рівняння і

передаточна функція ланки:

$$x = k_1 g, \quad W(p) = k_1.$$

Амплітудно-фазова, амплітудна та фазова частотні характеристики мають вигляд:

$$W(j\omega) = k_1, \quad W(\omega) = k_1, \quad \varphi(\omega) = 0$$

і зображені на рис. 2.9, а-в відповідно.

Перехідна і вагова функції:

$$\varpi(t) = k_1 \delta(t), \quad h(t) = k_1, \quad t > 0.$$

Прикладами безінерційних ланок є тверді механічні і гідравлічні передачі, електронний підсилювач на низьких частотах, гіроскоп, вимірювальні датчики.

Аперіодична (інерційна) ланка. Рівняння і передаточна функція ланки:

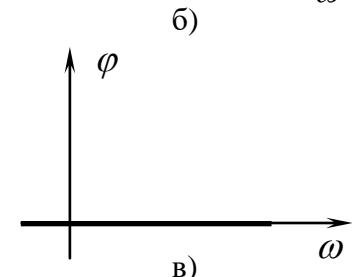
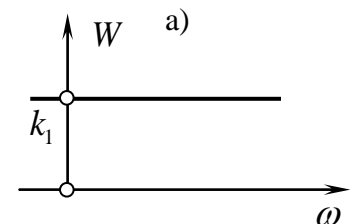
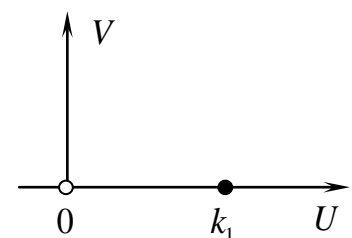


Рис. 2.9.

$$T_1 \frac{dx}{dt} + x = k_1 g, \quad (T_1 p + 1)X(p) = k_1 G(p), \quad W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}.$$

Частотні характеристики ланки визначаються співвідношеннями:

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{T_1 j\omega + 1}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg T_1 \omega,$$

$$U(\omega) = \frac{k_1}{T_1^2 \omega^2 + 1}$$

$$W(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}},$$

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$V(\omega) = -\frac{T_1 \omega k_1}{T_1^2 \omega^2 + 1}$$

Частотні характеристики зображені на рис.2.10.

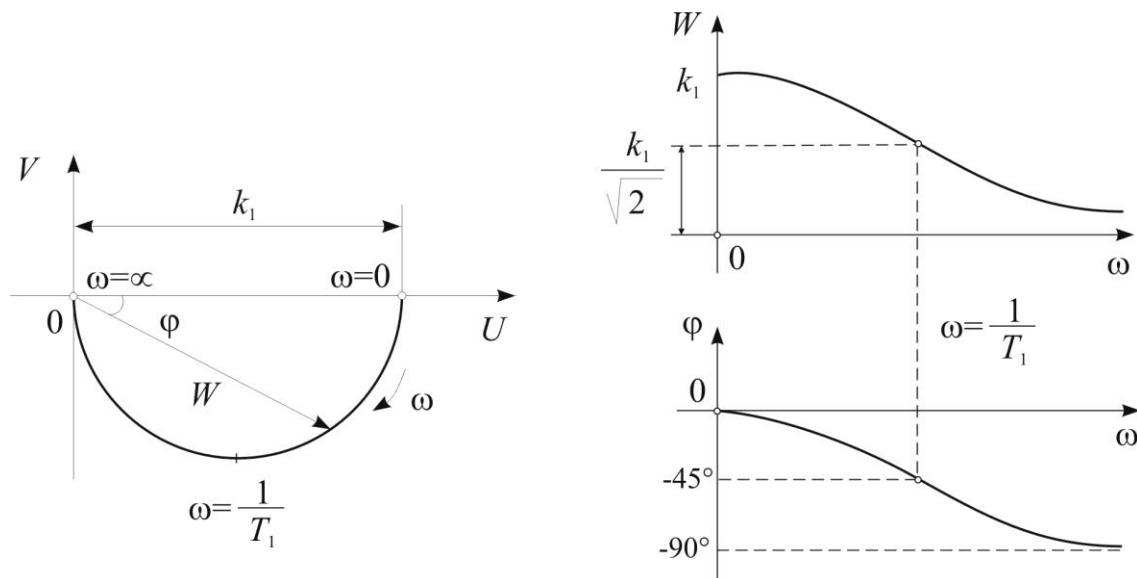


Рис. 2.10.

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика має вигляд:

$$L(\omega) = 20 \lg W(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}.$$

Ця характеристика має асимптоти:

а) при $\omega \rightarrow 0$: $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k_1$;

б) при $\omega \rightarrow \infty$: $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k_1 - 20 \lg T_1 \omega$;

Перша асимптота являє собою горизонтальну пряму, друга – похилу пряму з нахилом -20 дБ/дек. Перетинаються вони в точці $\omega = 1/T_1$. Істинна ЛАХ (пунктир на рис.2.11) близька до цих асимптот.

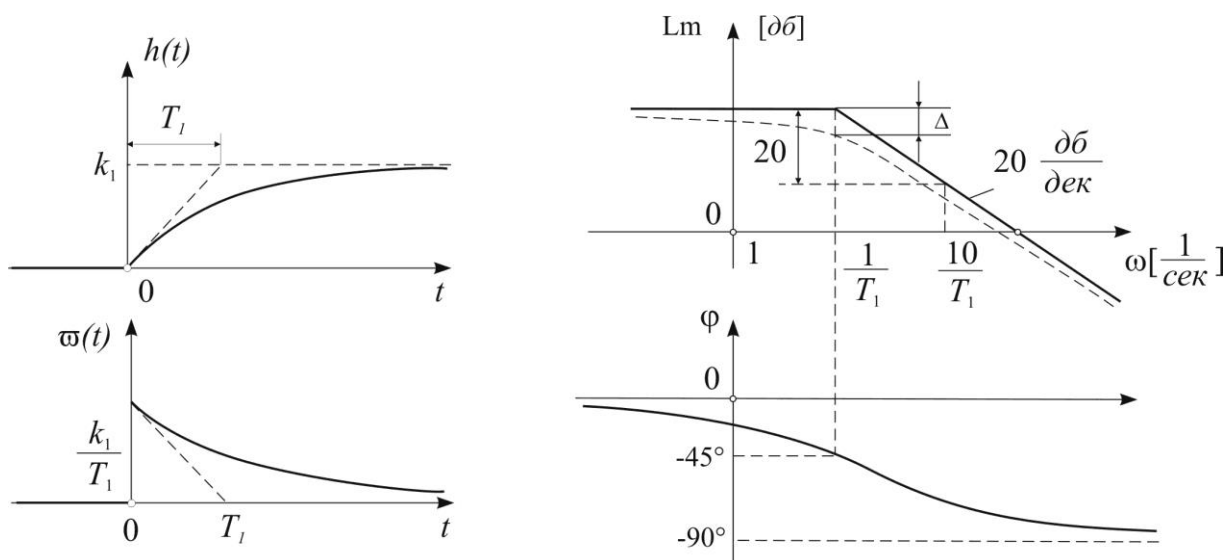


Рис. 2.11.

Найбільша її відмінність Δ від реальної характеристики має місце в точці $\omega = 1/T_1$:

$$\Delta = 20 \lg k_1 - (20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}) = 3,03 \text{ дБ.}$$

В інженерних розрахунках такою різницею нехтують і вважають, що логарифмічна амплітудна частотна характеристика аперіодичної ланки має вигляд ламаної, що складається з двох прямих. Як видно з рис. 2.11, менше значення сталої часу ланки T_1 відповідає більшому діапазон частот ($0 < \omega < \omega_3$) вхідного сигналу, які пропускає ланка з підсиленням, оскільки $\omega_3 = k_1/T_1$.

Вагова та перехідна функції ланки мають вигляд:

$$w(t) = \frac{k_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad h(t) = k_1 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}), \quad t > 0$$

Стала часу T_1 визначає нахил дотичної до характеристик $w(t)$ та $h(t)$ на початку кривої при $\omega = 0$ (див. рис. 2.11). Отже, величина T_1 характеризує степінь інерційності ланки, тобто тривалості перехідного процесу.

Прикладами аперіодичної ланки є електродвигун, якщо g – керуюча напруга, x – кутова швидкість вала, та RL - та RC -ланцюги (рис. 2.12).

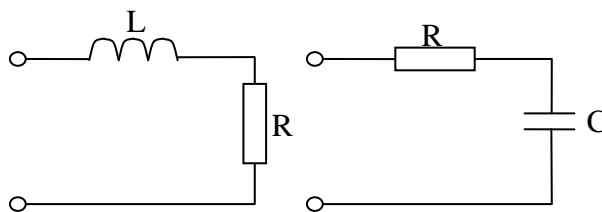


Рис. 2.12.

Аперіодична ланка другого порядку. Рівняння і передаточна функція ланки мають вигляд:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)x_2 = k_1 g, \quad W(p) = \frac{k_i}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

причому передбачається, що

$$T_1 \geq 2T_2,$$

оскільки при цьому корені характеристичного рівняння, які визначаються виразом:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2},$$

будуть дійсними.

Передаточну функцію аперіодичної ланки другого порядку можна записати у вигляді:

$$W(p) = \frac{k_1}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}, \quad \text{де } T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}.$$

Ця ланка еквівалентна двом аперіодичним (інерційним) ланкам I-го порядку, ввімкненим послідовно, з загальним коефіцієнтом підсилення k_1 та постійними часу T_3 і T_4 .

Амплітудно-фазова частотна характеристика ланки (рис. 2.13, а) :

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{(T_3 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1)};$$

її дійсна і уявна частини:

$$U(\omega) = \frac{k_1(1 - T_3 T_4 \omega^2)}{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)},$$

$$V(\omega) = \frac{-k_1 \omega (T_4 + T_3)}{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)};$$

амплітудна частотна характеристика – (рис. 2.13, б):

$$W(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}};$$

фазова характеристика - (рис. 2.13, в)

$$\varphi(\omega) = -\arctg T_3 \omega - \arctg T_4 \omega.$$

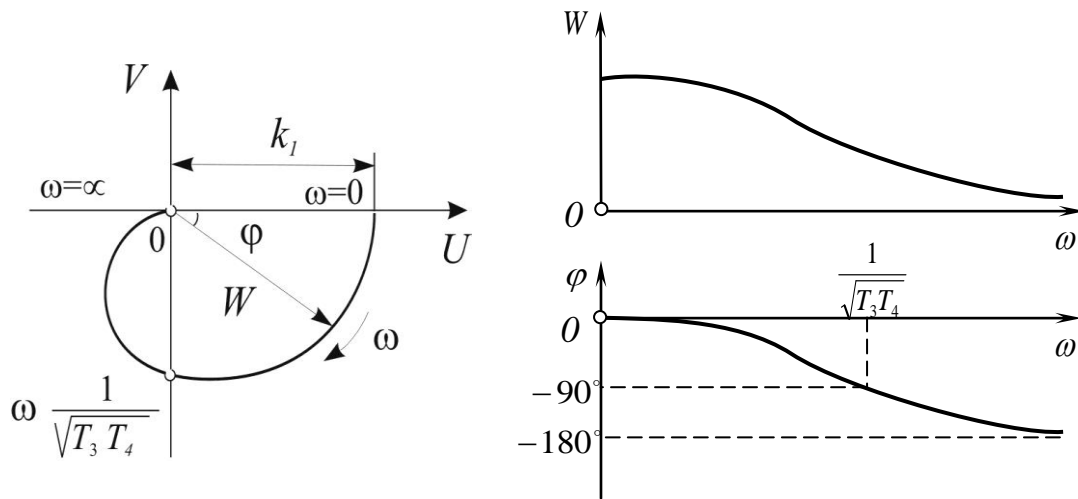


Рис. 2.13.

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика ланки має вигляд:

$$L(\omega) = 20\lg W(\omega) = 20\lg k_1 - 20\lg \sqrt{T_3^2 \omega^2 + 1} - 20\lg \sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1}.$$

Асимптотична характеристика (рис. 2.14) будується для трьох діапазонів:

1) при $\omega < \frac{1}{T_3}$ $L(\omega) \approx 20\lg k_1$ - горизонтальна пряма;

2) при $\frac{1}{T_3} < \omega < \frac{1}{T_4}$ $L(\omega) \approx 20\lg k_1 - 20\lg \omega T_3$ - пряма з нахилом -20дБ/дек;

3) при $\omega > \frac{1}{T_4}$ $L(\omega) \approx 20\lg k_1 - 20\lg \omega T_3 - 20\lg \omega T_4$ - пряма з нахилом -40дБ/дек.

Істинна характеристика близька до асимптотичної логарифмічної характеристики у вигляді ламаної кривої, а у характерних точках $\omega = \frac{1}{T_3}, \omega = \frac{1}{T_4}$ відрізняється від неї на 3 дБ.

У граничному випадку, коли $T_1 = 2T_2$, $T_3 = T_4$, усі три характерні точки $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_3 T_4}}, \omega = \frac{1}{T_3}, \omega = \frac{1}{T_4}$ збігаються в одну. За умови $T_1 < 2T_2$ ланка переходить у коливальну (див. нижче). Тому постійна T_1 , яка визначає інерційність ланки, є демпфувальним фактором (збільшення T_1 призводить до відсутності коливань).

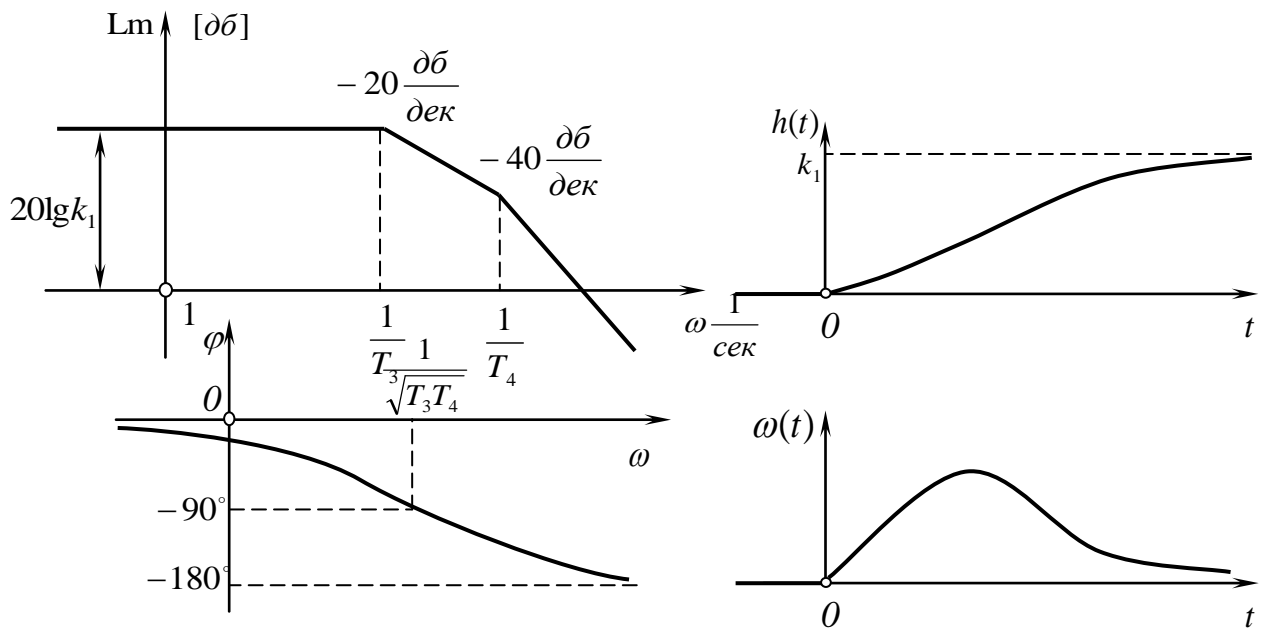


Рис. 2.14.

Вагова і перехідна функції ланки мають вигляд:

$$\varpi(t) = \frac{k_1}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right), \quad h(t) = k_1 \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right), \quad t > 0.$$

Прикладами такої ланки є:

- а) двигун постійного струму з урахуванням перехідних процесів у колі якоря;
- б) електромагнітний підсилювач;
- в) подвійний RL - ланцюг.

Коливальна ланка. Рівняння і передаточна функція ланки:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)X(p) = k_1 G(p),$$

$$W(p) = \frac{k_1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

причому передбачається, що

$$T_1 < 2T_2,$$

щоб корені характеристичного рівняння були комплексними.

Загальноприйнятий запис передаточної функції коливальної ланки у вигляді:

$$W(p) = \frac{k_1}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1},$$

де $T = T_2$, $\zeta = \frac{T_1}{2T_2}$, причому $0 < \zeta < 1$, тому що при $\zeta \geq 1$ ланка стає аперіодичною другого порядку.

Амплітудно-фазова частотна характеристика ланки (рис. 2.15) має вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{T^2(j\omega)^2 + 2\zeta Tj\omega + 1},$$

$$W(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}.$$

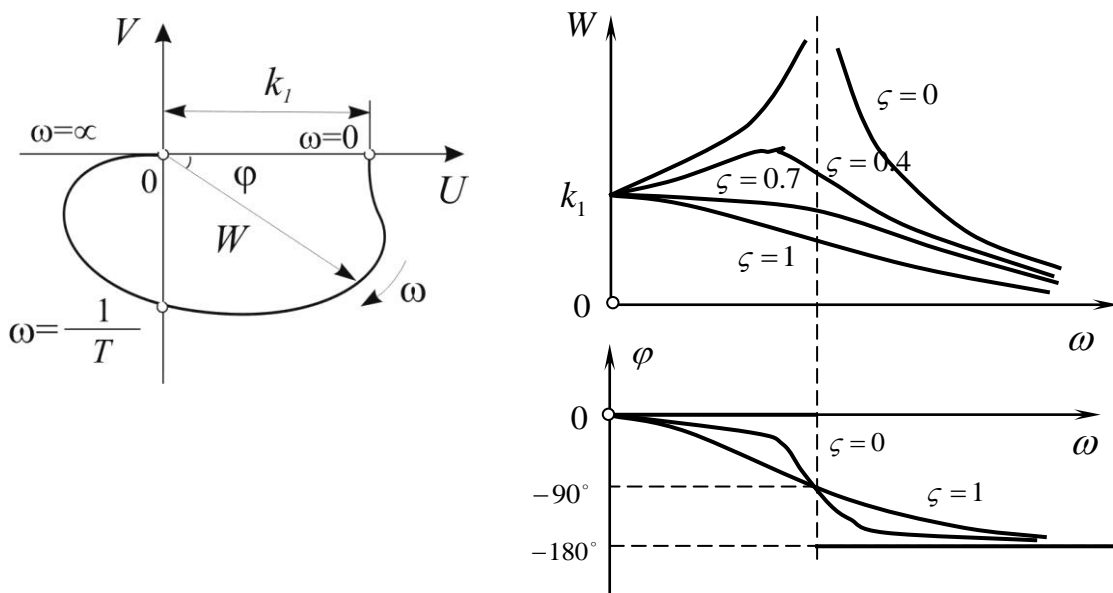


Рис. 2.15.

Амплітудна характеристика зменшується зі збільшенням ω , тобто $W(\omega) \leq k_1$, якщо $1 > \zeta > 0,707$. При $\zeta < 0,707$ з'являється «резонансний пік» на характеристиці $W(\omega)$, що іде в нескінченність при $\zeta \rightarrow 0$. Тому величина $\zeta = T_1/2T_2$ називається параметром загасання, збільшення якого веде до зменшення коливань і зменшення резонансного піка характеристики $W(\omega)$. Звідси ясна роль постійних часу T_1 і T_2 у рівнянні ланки: стала T_2 «розхитує» коливання, а T_1 - «демпфує» їх.

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика ланки

$$L(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2}.$$

Перший доданок характеристики являє собою горизонтальну пряму, а другий доданок має різний вигляд для різних значень ζ : при $\zeta = 1$ ЛАХ співпадає з ЛАХ аперіодичної ланки 2-го порядку; при значеннях $0,5 < \zeta < 1$ характеристика близька до ламаної; при $\zeta < 0,5$ помітний резонансний пік, висота якого дорівнює:

$$L_m = 20 \lg \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}},$$

а частота резонансного піку:

$$\omega_m = \frac{1}{T} \sqrt{1-2\zeta^2}.$$

У спрощених розрахунках досить знайти (див. рис. 2.16)

$$H = 20 \lg \frac{k_1}{2\zeta} \text{ при } \omega = \frac{1}{T}$$

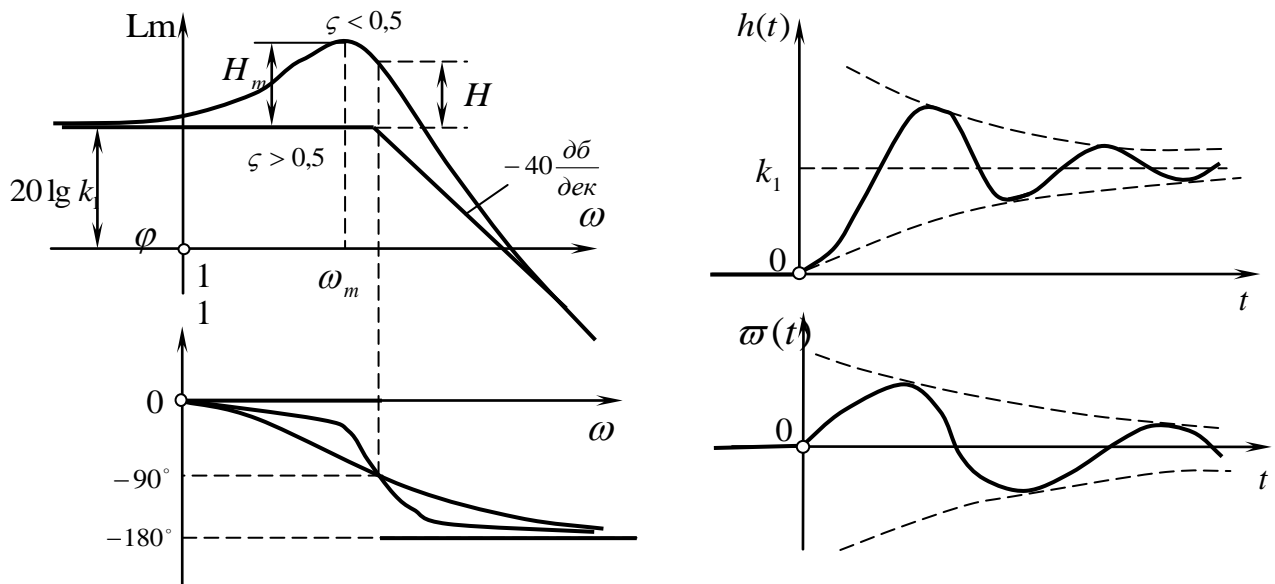


Рис. 2.16.

Перехідна і вагова функції коливальної ланки мають вигляд

$$h(t) = k_1 \left[1 - e^{\frac{-\zeta}{T_1} t} \left(\cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T_1} t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T_1} t \right) \right],$$

$$\varphi(t) = \frac{k_1 \zeta}{T_1 \sqrt{1-\zeta^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T_1} t, \quad t > 0.$$

При $\zeta = 0$ коливання стають незгасаючими, а при $\zeta = 1$ коливання вироджуються в аперіодичний процес.

Приклади коливальних ланок зображені на рис. 2.17.

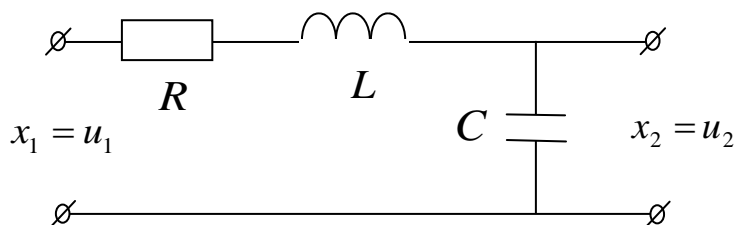
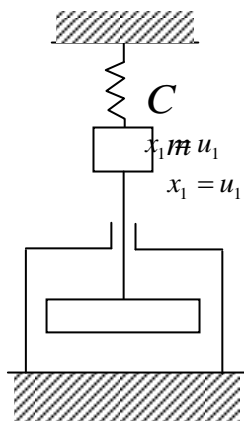


Рис. 2.17.

Окремий випадок коливальної ланки, при $\zeta = 0$, коли $h(t)$ і $\varpi(t)$ стають незгасаючими (періодичними), зветься **консервативною ланкою**, передаточна функція якої дорівнює:

$$W(p) = \frac{k_1}{T^2 p^2 + 1}.$$

При $\omega = \frac{1}{T}$ $W(\omega) \rightarrow \infty$, а фаза робить стрибок на π .

Розглянемо основні типи інтегруючих і диференціюючих ланок.

Ідеальна інтегруюча ланка. Рівняння і передаточна функція:

$$x = k_1 \int g dt \quad \text{чи} \quad px = k_1 g,$$

$$W(p) = \frac{k_1}{p}.$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика ланки (рис. 2.18):

$$W(j\omega) = -j \frac{k_1}{\omega},$$

$$U(\omega) = 0,$$

$$V(\omega) = -\frac{k_1}{\omega},$$

$$W(\omega) = \frac{k_1}{\omega},$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ.$$

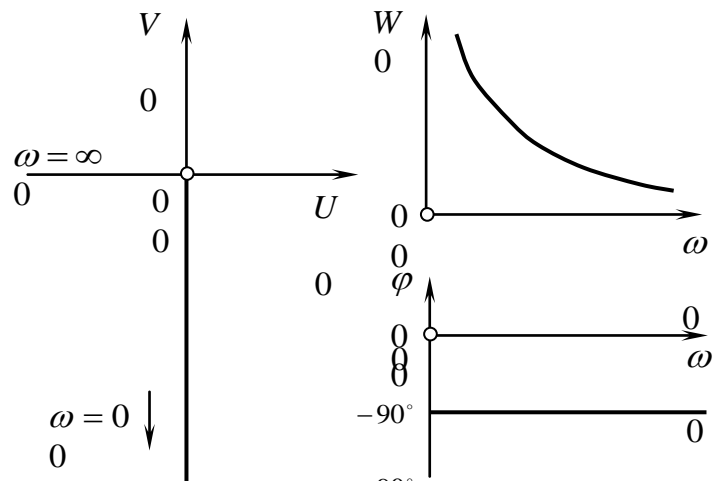


Рис. 2.18.

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика (рис. 2.19):

$$L(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega .$$

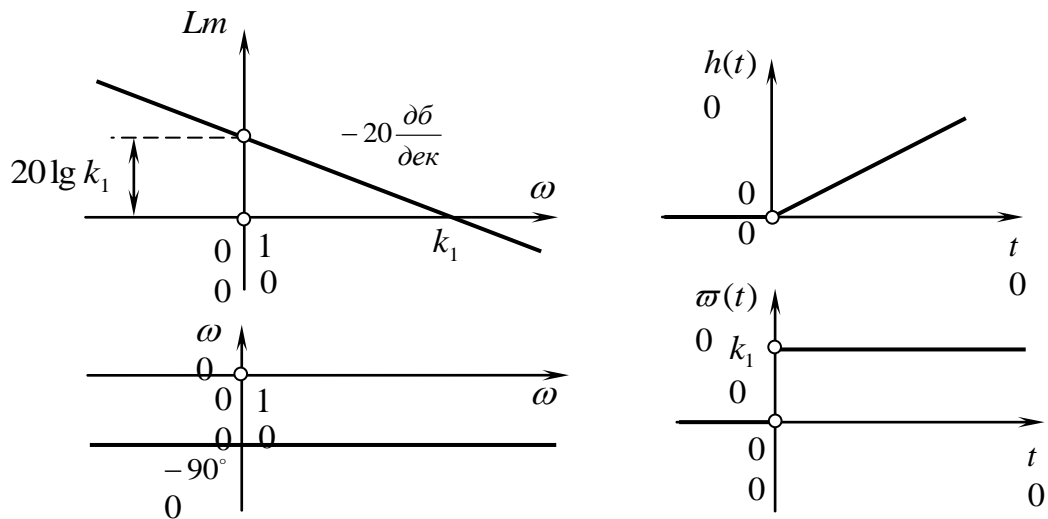


Рис. 2.19.

Перехідна і вагова функції мають вигляд

$$h(t) = k_1 t , \quad \varpi(t) = k_1 , \quad t > 0 .$$

Приклад ідеальної інтегруючої ланки (операційний підсилювач в режимі інтегрування) зображений на рис. 2.20.

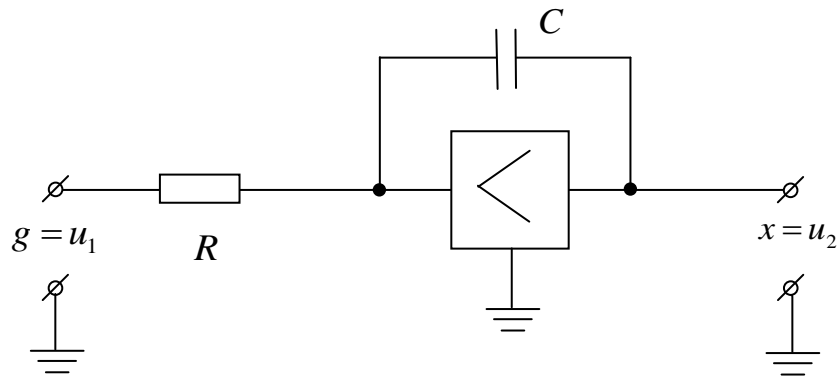


Рис. 2.20.

Інерційна інтегруюча ланка (або інтегруюча ланка з уповільненням).

Рівняння ланки:

$$T_1 \frac{dx}{dt} + x = k_1 \int g(t) dt ,$$

або у операторному вигляді:

$$(T_1 p + 1) p X(p) = k_1 G(p) .$$

Передаточна функція ланки:

$$W(p) = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)} .$$

Цю ланку можна представити у вигляді двох послідовно ввімкнених ланок – ідеальної інтегруючої та аперіодичної першого порядку.

Амплітудно-фазова частотна характеристика (рис. 2.21):

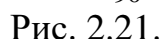
$$W(j\omega) = \frac{k_1}{j\omega(T_1 j\omega + 1)} ,$$

$$W = \frac{k_1}{\omega \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} ,$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctg T_1 \omega .$$

Дійсна і уявна частини амплітудно-фазової характеристики мають вигляд

$$U(\omega) = -\frac{k_1 T_1}{T_1^2 \omega^2 + 1} , \quad V(\omega) = -\frac{k_1}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)} .$$

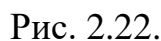


Логарифмічна амплітудна частотна характеристика

Перехідна і вагова функції мають вигляд

Отже, за рахунок постійної часу T_1 замість ідеального інтегрування відбувається інтегрування з інерційним запізнюванням.

Характеристики інерційної інтегруючої ланки наведені на рис. 2.22.



Ідеальна диференціююча ланка. Рівняння і передаточна функція ланки:

$$x = k_1 p g, \quad W(p) = k_1 p.$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика ланки:

$$W(j\omega) = jk_1\omega, \quad W = k_1\omega, \quad \varphi = +\frac{\pi}{2}.$$

У реальних системах такий вигляд характеристик ланки можливий лише в обмеженій смузі частот.

Логарифмічні частотні характеристики (рис. 2.23):

$$L(\omega) = 20 \lg k_1 + 20 \lg \omega, \quad \varphi = +\frac{\pi}{2}.$$

Перехідна і вагова функції мають вигляд

$$h(t) = k_1 \delta(t), \quad \omega(t) = k_1 \frac{d\delta}{dt}, \quad t > 0.$$

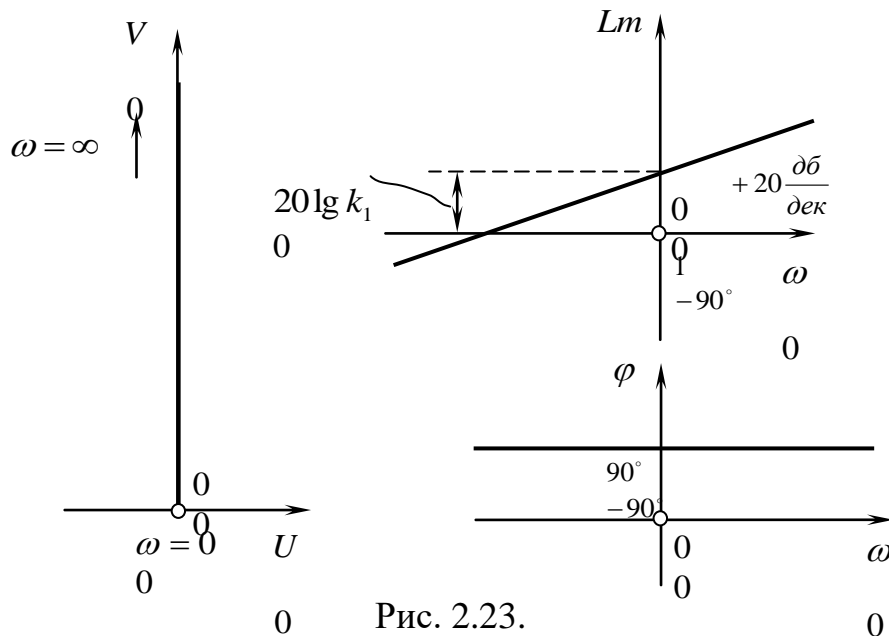


Рис. 2.23.

Прикладами такого типу ланок є тахогенератор і RC -коло з підсиленням (рис. 2.24).

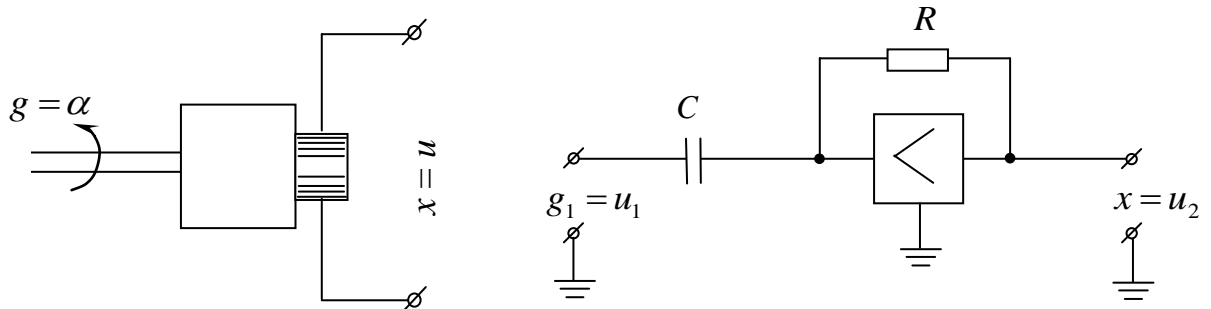


Рис. 2.24.

Ідеальна ланка з введенням похідної. Рівняння і передаточна функція ланки:

$$x = k_1 g + T_1 \frac{dg}{dt},$$

$$X(p) = k_1(1 + T_1 p)G(p), \quad W(p) = k_1(1 + T_1 p).$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика (рис. 2.25):

$$W(j\omega) = k_1(1 + jT_1\omega), \quad W = k_1\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}, \quad \varphi = \arctg T_1\omega.$$

Це можливо лише в обмеженій смузі частот. Логарифмічні частотні характеристики ланки:

$$L(\omega) = 20\lg k_1 + 20\lg\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}, \quad \varphi = \arctg T_1\omega.$$

Перехідна і вагова функції мають вигляд:

$$h(t) = k_1[1 + T_1\delta(t)], \quad \varpi(t) = k_1\left[\delta(t) + T_1\frac{d\delta}{dt}\right], \quad t > 0.$$

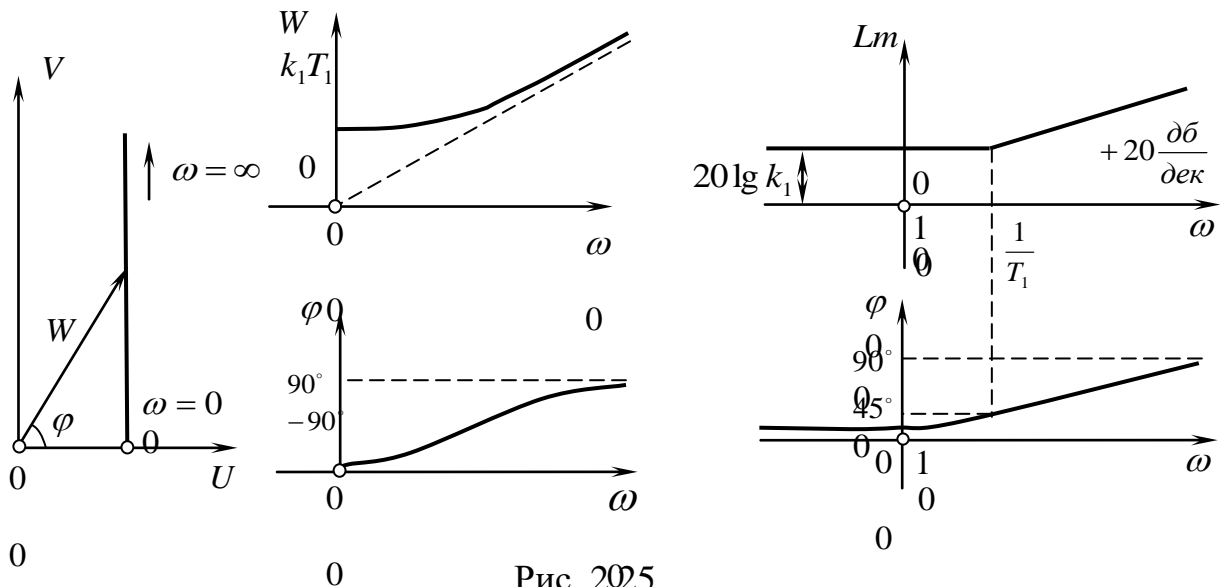


Рис. 2.25.

Інерційна диференціююча ланка (або диференціююча ланка з уповільненням). Рівняння і передаточна функція ланки:

$$T_1 \frac{dx}{dt} + x = k_1 \frac{dg}{dt},$$

$$(T_1 p + 1)x = k_1 p g, \quad W(p) = \frac{k_1 p}{T_1 p + 1}.$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика ланки (рис. 2.26):

$$W(j\omega) = \frac{jk_1\omega}{T_1 j\omega + 1}, \quad W = \frac{k_1\omega}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctg T_1\omega.$$

Логарифмічні частотні характеристики

$$L(\omega) = 20 \lg k_1 + 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctg T_1 \omega.$$

Перехідна і вагова функції мають вигляд

$$h(t) = \frac{k_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad \varpi(t) = \frac{k_1}{T_1} \delta(t) - \frac{k_1}{T_1^2} e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad t > 0.$$

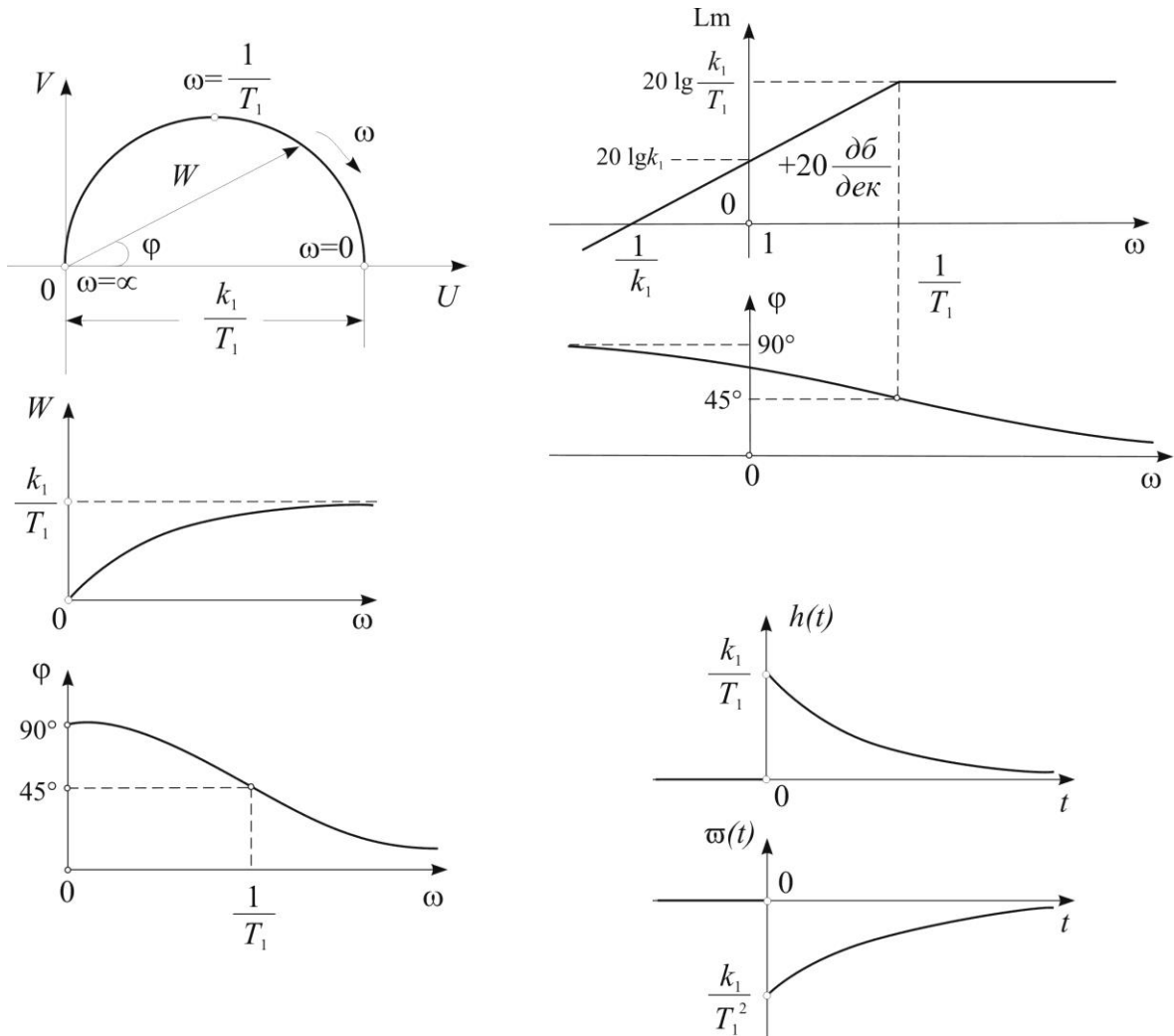


Рис. 2.26.

Прикладами такого типу ланок є RC -коло, трансформатор, механічний демпфер із пружиною (рис. 2.27).

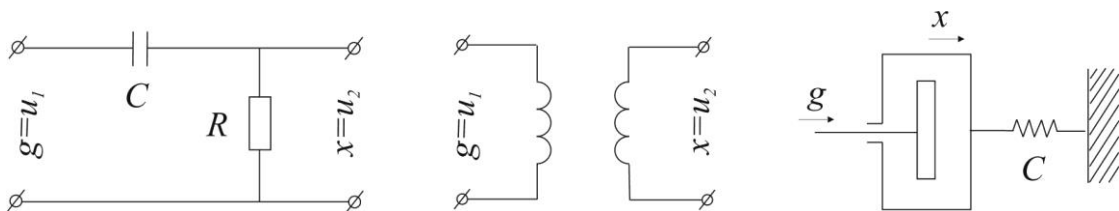


Рис. 2.27.

Інші типи ланок. Розглянуті вище ланки відносяться до стійких, або ланок з самовирівнюванням. Під самовирівнюванням розуміється здатність ланки самовільно переходити до нового усталеного значення при обмеженій зміні вхідної величини або збурення.

У загальному випадку передаточна функція ланки має вигляд:

$$W(p) = \frac{k_1 \tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)},$$

де $\tilde{B}(p)$ і $\tilde{A}(p)$ - поліноми з одиничними коефіцієнтами при молодших членах. Вище були розглянуті основні типи ланок, які найбільш часто зустрічаються на практиці. Усі вони характеризуються відсутністю коренів з додатною дійсною частиною як у чисельнику $\tilde{B}(p)$ (тобто нулів передаточної функції), так і у знаменнику $\tilde{A}(p)$ (тобто полюсів). Усі ланки, що володіють цією властивістю, називаються мінімальнофазовими. Зміст такої назви пояснюється нижче.

Існують ланки, у яких обмежена зміна вхідної величини або збурення не викликає переходу ланки до нового усталеного стану, а вихідна величина має тенденцію до необмеженого зростання у часі. Цей процес обумовлений наявністю додатних дійсних коренів або комплексних коренів з додатною дійсною частиною у характеристичному рівнянні.

Немінімальнофазові ланки. У відмінності від розглянутих вище, будь-яка ланка, передаточна функція якої має хоча б один корінь чисельника $\tilde{B}(p)$ або знаменника $\tilde{A}(p)$ з додатною дійсною частиною, називається немінімальнофазовою ланкою. Такі ланки є нестійкими. Наведемо приклад. Нехай ланка має передаточну функцію:

$$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p - 1}.$$

Тут є додатній полюс (корінь знаменника):

$$p_1 = +\frac{1}{T_1}.$$

Частотні характеристики такої ланки:

$$W(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}},$$

$$\varphi = -\arctg \frac{T\omega}{-1} = -(\pi - \arctg T_1 \omega) = \arctg T_1 \omega - \pi,$$

тоді як для аперіодичної ланки першого порядку справедливо:

$$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}, \quad p_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad W(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad \varphi = -\arctg T_1 \omega.$$

Різниця між ними, як бачимо, у величині фази. Амплітудні ж характеристики однакові. Виявляється, що з усіх можливих ланок з однаковими амплітудними характеристиками звичайні типові ланки мають найменші за абсолютним значенням фазові характеристики. У цьому і полягає зміст введених термінів.

Часові характеристики розглянутої немінімальнофазової ланки (рис. 2.28):

$$h(t) = k_1(e^{\frac{t}{T}} - 1), \quad \varpi(t) = \frac{k_1}{T} e^{\frac{t}{T}}.$$

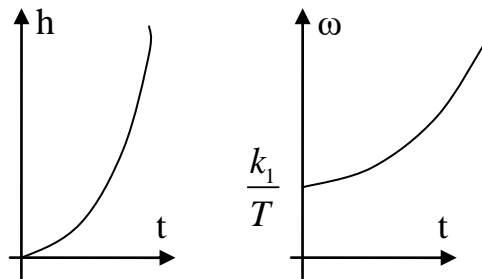


Рис. 2.28.

Важливою властивістю мінімальнофазових ланок є однозначна відповідність амплітудної і фазової частотної характеристик, тобто по відомій $W(\omega)$ можна визначити $\varphi(\omega)$ і навпаки. Та ж сама властивість відноситься і до дійсної і уявної частин АФЧХ $U(\omega)$ і $V(\omega)$.

Лекція 3. Структурні схеми систем автоматичного регулювання та їх перетворення. Передаточні функції та рівняння замкненої системи

СТРУКТУРНІ СХЕМИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Зображення САР у вигляді сукупності динамічних ланок зі вказанням зв'язків між ними називають структурною схемою САР. Структурна схема САР дає наочне уявлення про зв'язки між ланками, про проходження та перетворення сигналів. Структурна схема може бути складена на основі відомих рівнянь системи, і навпаки, рівняння системи можуть бути отримані за структурною схемою. Перша задача може мати різні варіанти розв'язання (різні структурні схеми), а друга вирішується однозначно. Передбачається, що динамічні ланки мають односпрямовану дію (від входу до виходу) і не впливають на інші, з'єднані з ними ланки (не змінюють їхні передаточні функції).

САР, як правило, є замкненими системами. Але при їхньому проектуванні часто попередньо розглядається розімкнене коло ланок, яке потім замикається. Розглянемо спочатку передаточні функції розімкненого кола ланок.

1. Коло з послідовно з'єднаних ланок (рис. 3.1).

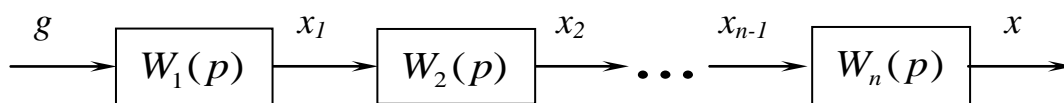


Рис. 3.1.

Передаточна функція такого ланцюга дорівнює добутку передаточних функцій усіх ланок

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) .$$

2. Коло з паралельно з'єднаних ланок (рис. 3.2).

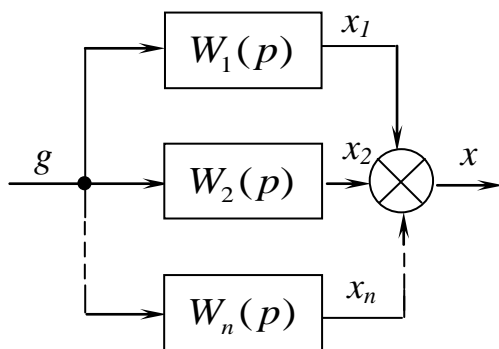


Рис.3.2.

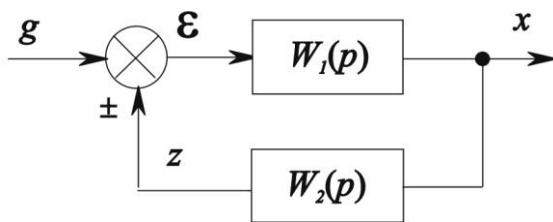
$$W_i(p) = \frac{X_i(p)}{G(p)} ,$$

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) .$$

Тоді і передаточна функція розімкненого кола з паралельно з'єднаних ланок буде дорівнювати сумі передаточних функцій усіх ланок

$$W(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \sum_{i=1}^n W_i(p) .$$

3. Коло з місцевим зворотним зв'язком (рис. 3.3) має наступний вигляд



Зворотний зв'язок (ЗЗ) може бути позитивним (+) або негативним (-). Для визначення результуючої передаточної функції запишемо наступні співвідношення:

Рис. 3.3.

$$\begin{cases} X(p) = W_1[G(p) \pm Z(p)] = W_1\varepsilon(p) \\ Z(p) = W_2(p)X(p) \end{cases}$$

де знак “+” відноситься до позитивного, а знак “-” – до негативного зворотного зв'язку. Підставивши друге рівняння системи в перше і виділивши відношення зображення вихідного сигналу $X(p)$ до вхідного $G(p)$, одержимо

$$W(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{W(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)} ,$$

де знак “-” відноситься до позитивного, а знак “+” – до негативного ЗЗ. Головне застосування в САР мають негативні зворотні зв'язки.

У загальному випадку, складне розімкнене коло ланок може містити у собі комбінації всіх трьох розглянутих випадків. Користаючись наведеними співвідношеннями, можна знаходити загальну передаточну функцію і для більш складних ланцюгів.

ПЕРЕТВОРЕННЯ СТРУКТУРНИХ СХЕМ

Для зручності розрахунку САР, як правило, необхідно перетворити початкову структурну схему системи до бажаного вигляду. Наприклад, для побудови ЛАХ зручно зобразити схему у вигляді послідовно з'єднаних ланок. Розглянемо деякі найпростіші правила перетворення структурних схем САР. Крім розглянутих вище перетворень послідовно або паралельно з'єднаних ланок, та ланки з місцевим ЗЗ, можна також:

1. Міняти місцями послідовно з'єднані ланки (рис.41)

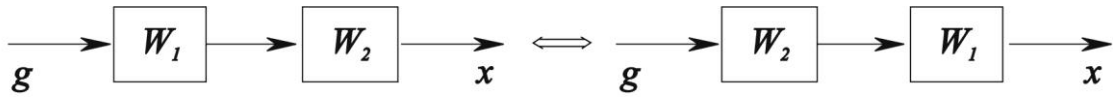


Рис. 3.4.

2. Перенос зовнішнього впливу (суматора) вперед або назад по колу (рис. 3.5)

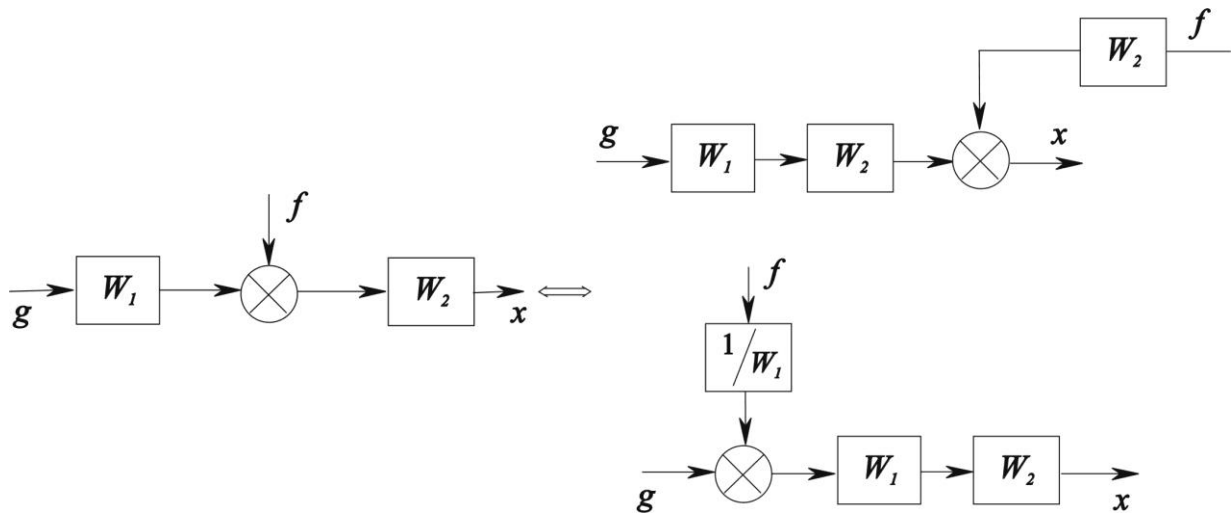


Рис. 3.5.

3. Перенос точки знімання сигналу (вузла) вперед або назад по колу (рис. 3.6).

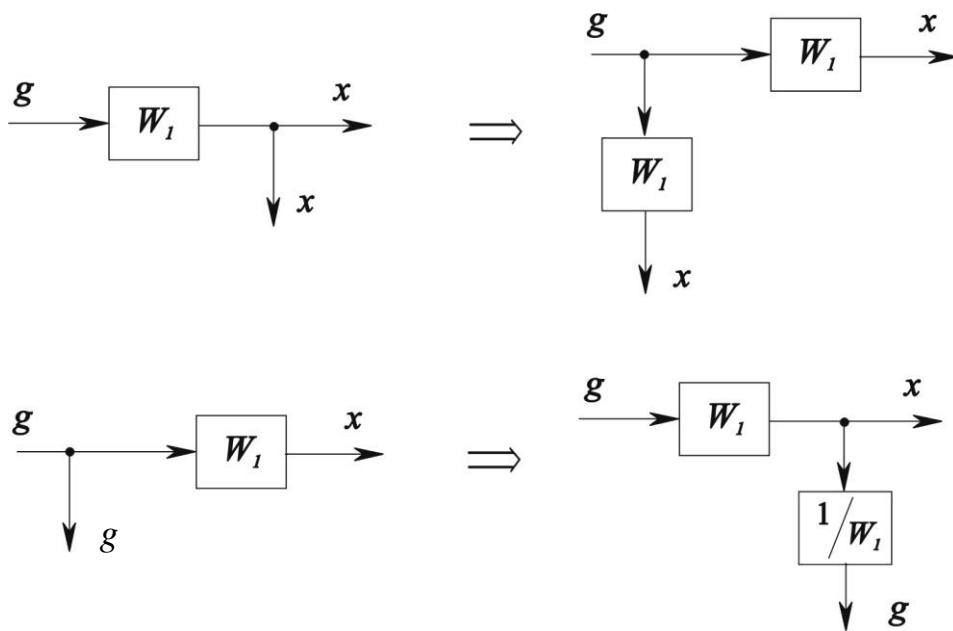


Рис. 3.6.

Обмежимося цими основними правилами структурних перетворень. За аналогією з ними можна робити бажані перетворення будь-яких структурних схем.

Наведемо приклад одержання загальної передаточної функції складного розімкненого кола з використанням структурних перетворень. Початкова схема має вигляд, зображений на рис. 3.7.

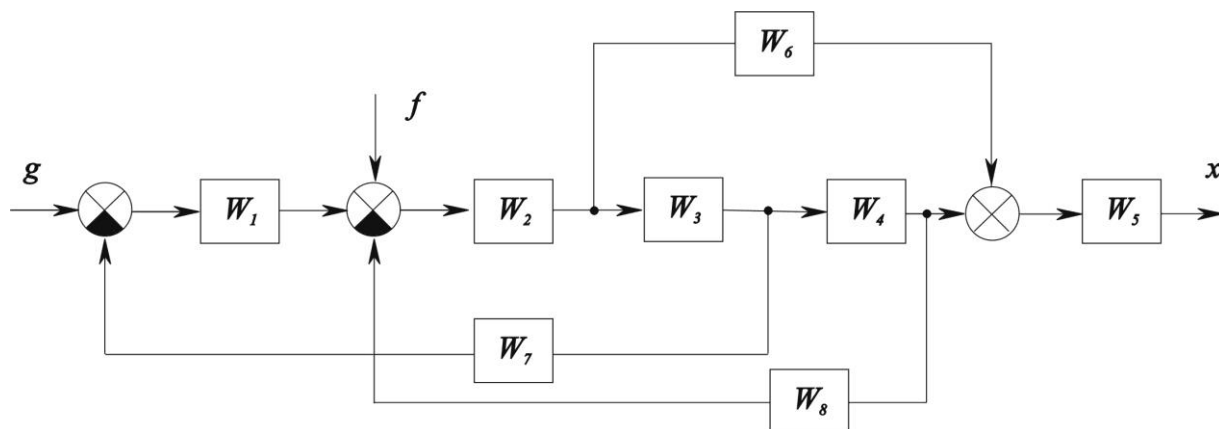


Рис. 3.7.

На першому кроці перетворень за правилом 3 переносимо точки знімання (вузли) із входу W_3 на його вихід і з виходу W_4 на його вхід, а також за правилом 2 зробимо перенос зовнішнього впливу f (рис. 3.8).

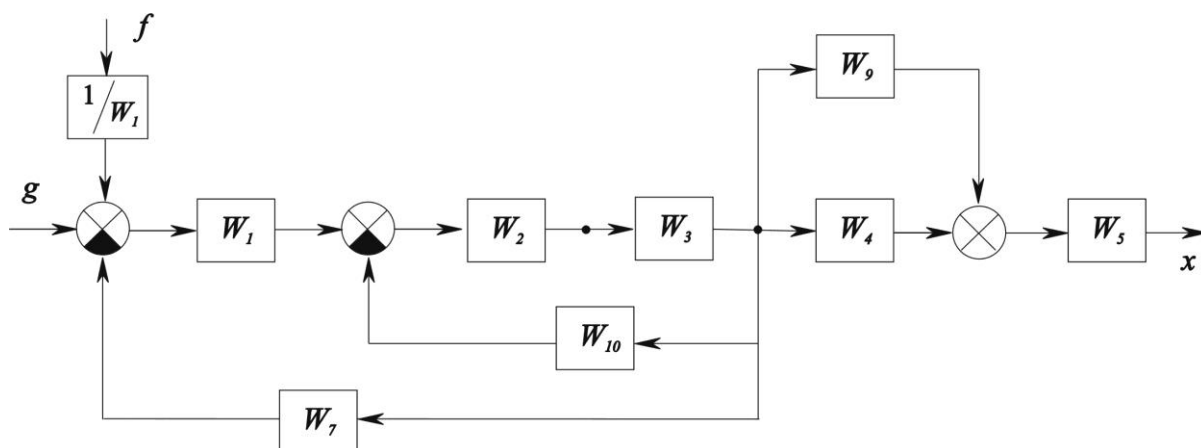


Рис. 3.8.

Передаточні функції ланок W_9 і W_{10} дорівнюють відповідно:

$$W_9(p) = \frac{W_6(p)}{W_3(p)};$$

$$W_{10}(p) = W_4(p)W_8(p).$$

На другому кроці перетворень замінимо ланку з місцевим ЗЗ (W_2 , W_3 , W_{10}), послідовну з нею ланку W_1 , і паралельно з'єднані ланки (W_4 , W_9):

$$W_{11}(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_{10}(p)} = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_4(p)W_8(p)} ;$$

$$W_{12}(p) = W_4(p) + W_9(p) = \frac{W_3(p)W_4(p) + W_6(p)}{W_3(p)} .$$

Структурна схема системи набуває вигляду, наведеного на рис. 3.9.

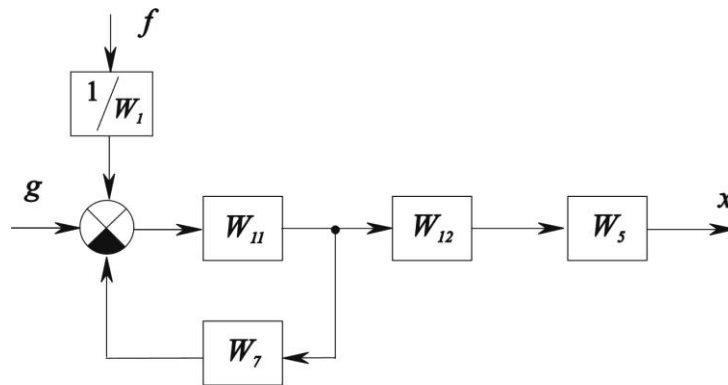


Рис. 3.9.

Нарешті, на підставі отриманої схеми знаходимо загальні передаточні функції всього розімкненого кола по кожній із двох вхідних величин окремо

$$W_g(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{W_{11}(p)W_{12}(p)W_5(p)}{1 + W_7(p)W_{11}(p)} ,$$

$$W_f(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{W_{11}(p)W_{12}(p)W_5(p)}{W_1(p)[1 + W_7(p)W_{11}(p)]} .$$

Аналогічно можна робити структурні перетворення, які приводять до бажаних простих видів будь-які складні структури всіляких систем.

Загальний коефіцієнт підсилення розімкненого кола. Доцільно передаточну функцію всього розімкненого кола в цілому $W(p)$ приводити до стандартного вигляду

$$W(p) = \frac{K\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)} ,$$

де $\tilde{B}(p)$ і $\tilde{A}(p)$ – поліноми з одиничними коефіцієнтами при молодших членах. Множник K є загальним коефіцієнтом підсилення всього розімкненого кола ланок.

Відповідно до записаних вище формул одержимо:

а) для кола з послідовно з'єднаних ланок

$$K = k_1 k_2 \dots k_n ,$$

де k_i – коефіцієнти підсилення окремих ланок;

б) для кола з паралельно з'єднаних позиційних ланок

в)

$$K = k_1 + k_2 + \dots + k_n ;$$

г) для кола з негативним місцевим зворотним зв'язком у випадку, якщо ланки W_1 і W_2 позиційні

$$K = \frac{k_1}{1 + k_1 k_2} ,$$

а при додатному місцевому зворотному зв'язку

$$K = \frac{k_1}{1 - k_1 k_2} .$$

У випадку наявності непозиційних ланок формули зміняться (див. розділ корегувальні ланки). Підкреслимо, що степінь чисельника $K\tilde{B}(p)$ передаточної функції розімкненого кола ланок у реальних системах звичайно нижче степеню знаменника $\tilde{A}(p)$.

Операторне рівняння розімкненого кола:

$$A(p)X = KB(p)G ,$$

а характеристичне рівняння:

$$A(p) = 0 .$$

ПЕРЕДАТОЧНІ ФУНКЦІЇ І РІВНЯННЯ ЗАМКНЕНОЇ СИСТЕМИ

З кола ланок будь-якої складності, показаної на рис. 3.10 одним прямокутником, виходить замкнена система за допомогою одиничного негативного зворотного зв'язку.

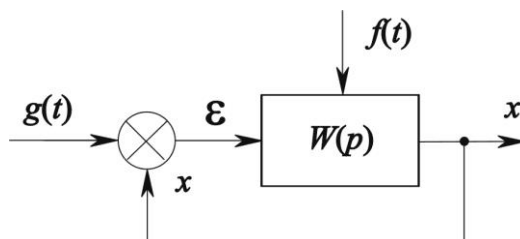


Рис. 3.10.

Цей зворотний зв'язок називають головним, на відміну від місцевих зворотних зв'язків, які можуть бути, як ми бачили, усередині в складі розімкненого кола ланок. Нехай є зовнішні впливи: $g(t)$ — задавальний, $f(t)$ — збурюючий. У загальному випадку можуть бути введені декілька збурюючих впливів, прикладених у різних місцях системи.

Передаточна функція розімкненого кола

$$\frac{X(p)}{E(p)} = W(p), \quad E(p) = L\{\varepsilon(t)\},$$

являє собою відношення багаточленів з одиничними коефіцієнтами при молодших членах, тобто

$$W(p) = \frac{K\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)},$$

де K — загальний коефіцієнт підсилення розімкненого кола.

Передаточна функція розімкненого кола має дуже велике значення в теорії САР, тому що багато методів аналізу і синтезу засновані саме на цій функції.

Передаточні функції замкненої системи записуються окремо для кожної комбінації входу і виходу, тобто для кожного зовнішнього впливу окремо.

Розділимо канали проходження сигналів у системі від кожного зовнішнього впливу. Збурюючий вплив $f(t)$ може бути прикладений в будь-якій точці. Використовуючи друге правило структурних перетворень, завжди можна виділити ту частину схеми, через яку проходять сигнали від $f(t)$ на

вихід x . Це показано на рис. 3.11 у вигляді передаточної функції $M(p)$, яка входить до загальної схеми як частина $W(p)$.

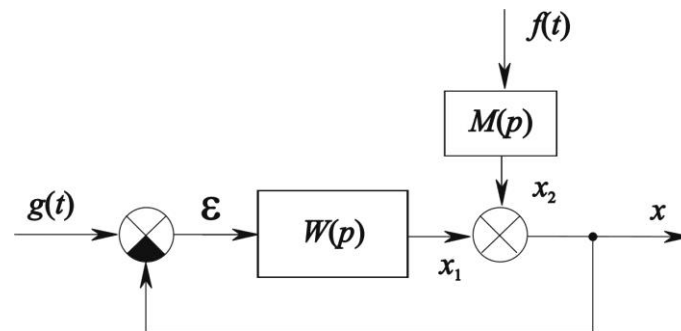


Рис. 3.11.

Для задавального впливу $g(t)$ схема проходження сигналів зберігається в повному вигляді $W(p)$. На виході маємо умовно $x = x_1 + x_2$. Основні співвідношення у зображеннях по Лапласу будуть мати вигляд

$$E(p) = G(p) - X(p) ,$$

$$X(p) = W(p)E(p) + M(p)F(p) .$$

У розрахунках автоматичних систем застосовують три основні види передаточних функцій замкненої системи.

1. Головна передаточна функція замкненої системи (по задавальному впливу), при $f(t) = 0$:

$$W_g(p) = \frac{X}{G} .$$

При $F = 0$ маємо

$$X = W(p)(G - X) ,$$

Звідки

$$W_g(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p) + K\tilde{B}(p)} .$$

2. Передаточна функція замкненої системи для помилки (при $f(t) = 0$):

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{E}{G}.$$

Можна записати $\frac{E}{G} = \frac{G - X}{G} = 1 - W_g(p)$, звідки

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{\tilde{A}(p)}{\tilde{A}(p) + K\tilde{B}(p)}.$$

3. Передаточна функція замкненої системи по збурюючому впливу (при $g(t) = 0$):

$$W_f(p) = \frac{X}{F}.$$

При $G = 0$ маємо

$$X = W(p)(-X) + M(p)F,$$

звідки

$$W_f(p) = \frac{M(p)}{1 + W(p)} = \frac{C(p)}{\tilde{A}(p) + K\tilde{B}(p)},$$

де $C(p) = \tilde{A}(p)M(p)$, причому багаточлен $C(p)$ залежить від місця прикладення збурюючого впливу. Зауважимо, що оскільки при $g(t) = 0$ $E = -X$, то передаточна функція замкненої системи для помилки по збурюючому впливу, $W_{\varepsilon}(p) = \frac{E}{F}$ буде такою ж, як і для регульованої величини $W_f(p)$, але з протилежним знаком.

Важливо відзначити, що знаменник усіх видів передаточної функції замкненої системи один і той самий.

Для замкненої системи в цілому маємо

$$X = W_g(p)G + W_f(p)F = \frac{W(p)}{1 + W(p)}G + \frac{M(p)}{1 + W(p)}F$$

або

$$X = \frac{K\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p) + K\tilde{B}(p)}G + \frac{C(p)}{\tilde{A}(p) + K\tilde{B}(p)}F.$$

Лекція 4. Процес керування і вимоги до нього. Постійні помилки. Астатичні ланки і системи. Закони регулювання при реалізації принципу керування по відхиленню

ПРОЦЕС КЕРУВАННЯ І ВИМОГИ ДО НЬОГО

Процес керування у часі визначається розв'язком диференціального рівняння динаміки замкненої системи. Цей розв'язок для регульованої величини можна зобразити у вигляді

$$x(t) = x_{\epsilon}(t) + x_{\text{уст}}(t) ,$$

де $x_{\epsilon}(t)$ – вільна складова процесу, що визначається загальним розв'язком однорідного рівняння при заданих початкових умовах; $x_{\text{уст}}(t)$ – усталена складова, яка визначається частковим розв'язком рівняння з заданою правою частиною, тобто задавальними впливами та збурюючими впливами і їх похідними.

Форма перехідного процесу $x(t)$ буде визначатися не тільки коренями характеристичного рівняння системи, але ще і виглядом зовнішніх впливів, а також коефіцієнтами багаточленів $\tilde{B}(p)$ і $\tilde{C}(p)$. Іншими словами, форма перехідного процесу залежить не тільки від полюсів передаточних функцій замкненої системи

$$W_g(p) = \frac{K\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p) + K\tilde{B}(p)} = \frac{K\tilde{B}(p)}{\tilde{D}(p)} ; \quad W_f(p) = \frac{\tilde{C}(p)}{\tilde{D}(p)} ,$$

але ще і від нулів цих передаточних функцій. Теоретично вільний процес $x_{\epsilon}(t)$ триває нескінченно довго, але його вплив практично становиться незначним через кінцевий час. Після загасання $x_{\epsilon}(t)$ встановлюється процес $x_{\text{уст}}(t)$. Це проілюстровано на рис. 4.1. Для випадків постійного і синусоїдального зовнішнього впливу.

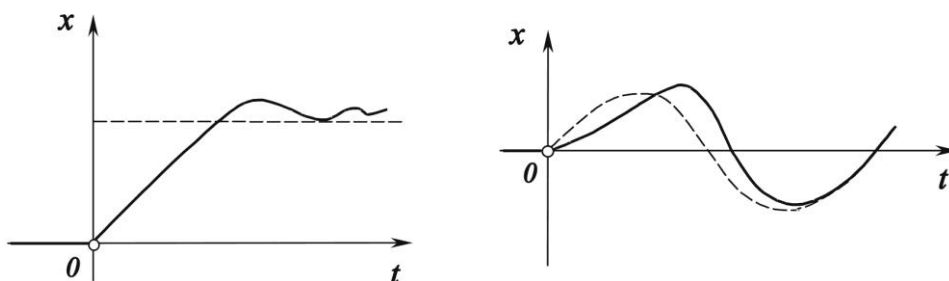


Рис. 4.1.

Таким чином, формою усталеного процесу $x_{\text{уст}}(t)$ визначається точність САК. При цьому усталена помилка системи дорівнює:

$$\varepsilon_{ycm}(t) = g(t) - x_{ycm}(t) ,$$

а повне значення помилки, істотне для початку процесу дорівнює

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t) .$$

Розв'язок для перехідного процесу можна записати у вигляді інтеграла згортки

$$x(t) = \int_{t_0}^t \varpi(t - \tau) g(\tau) d\tau ,$$

де $\varpi(\tau)$ - вагова функція; t_0 - момент часу відповідний прикладенню впливу.

Усталеним (змушеним) називають процес, який встановлюється у системі через нескінченно великий проміжок часу після прикладення впливу. Нехай $t_0 = -\infty$

$$x_{ycm}(t) = \int_{-\infty}^t \varpi(t - \tau) g(\tau) d\tau = \left| \tau = t - \tau \right| = \int_0^{\infty} \varpi(\tau) g(t - \tau) d\tau .$$

Різниця між перехідним $x(t)$ і усталеним $x_{ycm}(t)$ процесами визначає вільний процес

$$x_{cv}(t) = x(t) - x_{ycm}(t) .$$

З точки зору протікання процесу керування, вимоги до системи формуються по трьох основних напрямках:

- 1) точність;
- 2) стійкість;
- 3) якість перехідного процесу.

Точність системи задається і визначається в усталеному режимі. Стійкість гарантує загасання перехідного процесу, після чого необхідно забезпечити бажану якість перехідного процесу.

ПОСТІЙНІ ПОМИЛКИ

Серед типових режимів роботи системи автоматичного керування, що визначають точність цієї системи, найпростішими є режими роботи при постійній величині зовнішнього впливу і при зміні зовнішнього впливу з постійною швидкістю.

Знайдемо значення помилки в замкненій системі автоматичного керування при постійній величині зовнішнього задавального впливу

$$g(t) = const = g_0 .$$

В цьому випадку помилка називається статичною помилкою.

Нехай задані передаточна функція розімкненого кола

$$W(p) = \frac{K\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)},$$

де $\tilde{B}(p)$ і $\tilde{A}(p)$ не містять множника p (вільні члени їх дорівнюють одиниці).

Тоді передаточна функція замкненої системи для помилки буде

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{\tilde{A}(p)}{\tilde{A}(p) + K\tilde{B}(p)}.$$

Відповідно до граничної теореми перетворення Лапласа вираз для статичної помилки набуде вигляду:

$$\varepsilon_{cm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pW_{\varepsilon}(p)G(p).$$

В даному випадку $G(p) = \frac{g_0}{p}$. Підставивши $G(p)$ у вираз для ε_{cm} , одержимо

$$\varepsilon_{cm} = \frac{g_0}{1 + K},$$

оскільки вільні члени багаточленів $\tilde{A}(p)$ і $\tilde{B}(p)$ дорівнюють одиниці.

Помилка при надходженні на вхід системи задавального впливу, який змінюється з постійною швидкістю:

$$g(t) = g_0 + g_1 t, \quad G(p) = \frac{g_0}{p} + \frac{g_1}{p^2}$$

називається *швидкісною помилкою*.

Зміна вхідного впливу з постійною швидкістю викличе зміну помилки також з постійною швидкістю. При досить тривалому впливі таке наростання помилки неприпустимо. Для ліквідації цього явища потрібно змінити структуру системи так, щоб багаточлен $\tilde{A}(p)$ не мав вільного члена, тобто $\tilde{A}(p) = p\tilde{A}_1(p)$. Іншими словами, передаточна функція розімкненого кола цієї системи $W(p)$ повинна мати нульовий полюс. Тоді:

$$\varepsilon_{швид} = \lim_{p \rightarrow 0} W_{\varepsilon}(p)G(p)p = \frac{g_1}{K}.$$

Отже, у такій системі при задавальному впливі з постійною швидкістю не буде наростаючої помилки.

При постійному задавальному впливі $g(t) = const = g_0$ у такій системі статична помилка дорівнюватиме нулю ($\varepsilon_{cm} = 0$).

АСТАТИЧНІ ЛАНКИ І СИСТЕМИ

Отже система, у якій є нульовий полюс у передаточній функції розімкненого кола $W(p)$, не буде мати статичної помилки і дасть постійне значення швидкісної помилки. Така система називається астатичною системою на відміну від системи, що не має нульового полюса передаточної функції в розімкненому стані.

Кратність нульового полюса називається порядком астатизму або індексом аперіодичної нейтральності ланки. Передаточна функція астатичної ланки має вигляд

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{p^\nu},$$

де $W_0(p)$ – передаточна функція астатичної ланки нульового порядку (статичної, позиційної ланки), ν – порядок астатизму. До типових астатичних ланок першого порядку відноситься ідеальна інтегруюча ланка $W(p) = 1/p$.

Астатизм впливає на вигляд частотних характеристик. Якщо передаточна функція розімкненого кола має астатизм ν -го порядку (має ν нульових полюсів):

$$W_p(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^\nu (a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0)} = \frac{W_{cm}(p)}{p^\nu},$$

то годограф АФЧХ розімкненої системи необхідно доповнити дугою нескінченно великого радіусу, яка містить ν чвертей, тобто годограф статичної ланки повернеться на кут $\nu\pi/2$. Дуга нескінченного радіусу завжди будується у від'ємному напрямку (за годинниковою стрілкою), причому, якщо границя

$\lim_{p \rightarrow 0} W_{cm}(p) = \frac{b_0}{a_0} > 0$, то дуга починається на додатній частині дійсної вісі, а якщо

$\lim_{p \rightarrow 0} W_{cm}(p) = \frac{b_0}{a_0} < 0$ - на від'ємній. Функцію $W_{cm}(p)$ виділяють з передаточної

функції розімкненого кола $W_p(p)$ шляхом видалення з її знаменника p^ν . Дуга повинна закінчуватися на годографі АФЧХ розімкненого кола.

На рис. 4.2 показаний вигляд АФЧХ системи

$W(p) = \frac{W_{cm}(p)}{p^\nu}$, $W_{cm}(p) = \frac{1}{1+Tp}$ для 0-го, 1-го, 2-го і 3-го порядку астатизму ($\nu=0,1,2,3$).

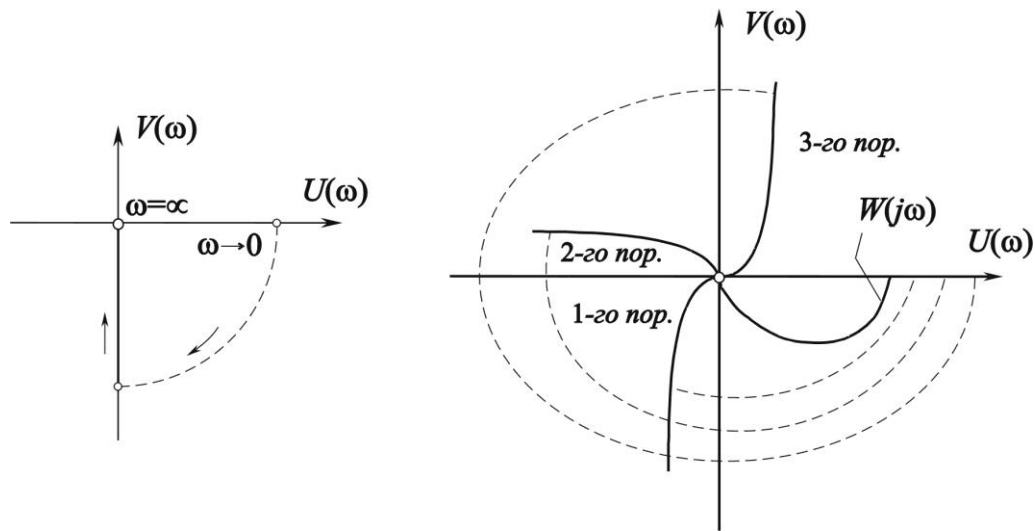


Рис. 4.2.

При нульовому порядку астатизму АФЧХ збігається з АФЧХ аперіодичної ланки першого порядку, позначеної на рис. 50 через $W(j\omega)$.

При першому порядку астатизму АФЧХ збігається з АФЧХ інерційної інтегруючої ланки (див. рис.30). Оскільки $\lim_{p \rightarrow 0} W_{cm}(p) = 1 > 0$, при наявності астатизму дуга починається на додатній частині дійсної вісі і проходить одну чверть для першого порядку астатизму, дві чверті – для другого, три чверті – для третього порядку астатизму.

Як видно з аналізу помилок, для зменшення величини помилки потрібно забезпечити велике значення загального коефіцієнта підсилення K розімкненого кола. Тому величина K називається добротністю системи.

Якщо розглядати задавальний вплив у вигляді

$$g(t) = g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots + g_{\nu-1} t^{\nu-1} + g_{\nu} t^{\nu},$$

зображення якого дорівнює

$$G(p) = \frac{g_0}{p} + \frac{g_1}{p^2} + \frac{2g_2}{p^3} + \dots + \frac{(\nu-1)!g_{\nu-1}}{p^{\nu}} + \frac{\nu!g_{\nu}}{p^{\nu+1}},$$

то в системі з астатизмом ν -го порядку одержимо постійну помилку

$$\varepsilon_{уст} = \frac{\nu!g_{\nu}}{K},$$

а всі перші ν членів задавального впливу мають нульову усталену помилку.

Крім розглядання астатизму системи стосовно задавального впливу, можна також розглядати астатизм стосовно збурення.

Оскільки відхилення вихідної величини x обумовлено збуренням, то треба скористатися передаточною функцією замкненої системи по збуренню

$$W_f(p) = \frac{\tilde{C}(p)}{\tilde{A}(p) + K\tilde{B}(p)},$$

причому

$$x_{yct} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p W_f(p) F(p) .$$

Як видно, для існування астатизму системи стосовно збурення потрібна наявність нульових коренів у багаточлені $\tilde{C}(p)$.

Розглянемо САР, що містить об'єкт регулювання l -го порядку астатизму і регулятор $(\nu - l)$ -го порядку астатизму (рис. 4.3), тобто $W_{op}(p) = \frac{W_1(p)}{p^l}$, $W_p(p) = \frac{W_2(p)}{p^{\nu-l}}$.

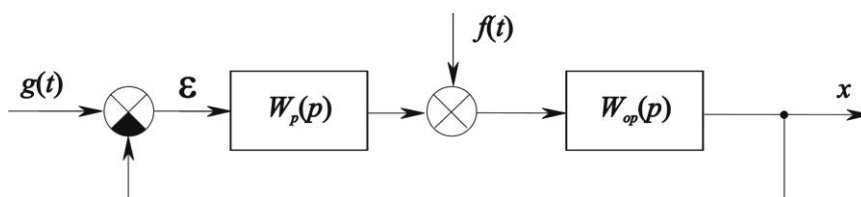


Рис. 4.3.

Передаточні функції для помилки по задавальному впливу (при $f(t) = 0$) і по збуренню (при $g(t) = 0$) мають вигляд:

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{E(p)}{G(p)} = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{1}{1 + W_p(p)W_{op}(p)} ;$$

$$W_{\varepsilon f}(p) = \frac{E(p)}{F(p)} = - \frac{W_{op}(p)}{1 + W_p(p)W_{op}(p)} .$$

Підставивши замість $W_p(p)$ і $W_{op}(p)$ їх вирази, одержимо:

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{p^{\nu}}{p^{\nu} + W_1(p)W_2(p)} ; W_{\varepsilon f}(p) = - \frac{p^{\nu-l}W_1(p)}{p^{\nu} + W_1(p)W_2(p)} .$$

Таким чином, розглянута система має астатизм ν -го порядку стосовно задавального впливу і $(\nu-l)$ -го порядку стосовно збурення.

В залежності від значень l і ν можна виділити чотири випадки:

- 1) $l = \nu = 0$. Об'єкт регулювання і регулятор статичні. Система є статичною стосовно задавального впливу і збурення.
- 2) $l = 0$; $\nu \neq 0$; $\nu - l \neq 0$. Об'єкт регулювання статичний, а регулятор астатичний. Система має астатизм ν -го порядку стосовно задавального впливу і збурення.
- 3) $l \neq 0$; $\nu = l$; $\nu - l = 0$. Об'єкт регулювання астатичний, а регулятор статичний. Система має астатизм ν -го порядку стосовно задавального впливу і є статичною стосовно збурення.

- 4) $l \neq 0$; $v > l$; $v - l \neq 0$ Об'єкт регулювання і регулятор астатичні. Система має астатизм v -го порядку по задавальному впливу і $(v - l)$ -го порядку по збуренню.

ЗАКОНИ РЕГУЛЮВАННЯ САР ПРИ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРИНЦИПУ КЕРУВАННЯ ПО ВІДХИЛЕННЮ

Під законом регулювання розуміється алгоритм або функціональна залежність, відповідно до яких регулятор (пристрій керування) формує керуючий вплив.

Розглянемо замкнену САК, у якій діє задавальний вплив $g(t)$ і збурюючий $f(t)$ вплив (рис.4.4).

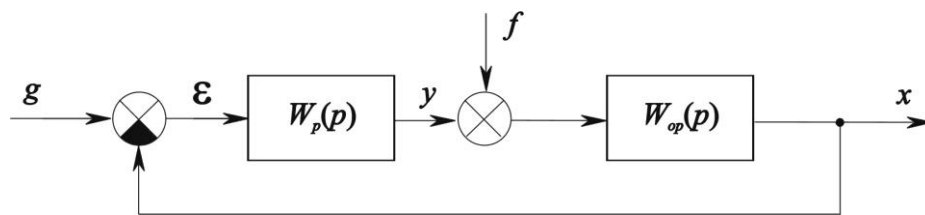


Рис. 4.4.

Помилка системи визначається відповідно до виразу:

$$\varepsilon(p) = \frac{G(p)}{1 + W_p(p)W_{op}(p)} - \frac{W_{op}(p) \cdot F(p)}{1 + W_p(p)W_{op}(p)}.$$

Припустимо, що регульований об'єкт являє собою ланку позиційного (статичного) типу. Це означає, що в усталеному режимі між регульованою величиною і керуючим впливом існує пропорційна залежність (при $f(t)=0$)

$$x_{уст}(t) = k_{op} x_{уст},$$

де $k_{op} = W_{op}(0)$ - коефіцієнт передачі об'єкта регулювання.

Пропорційне регулювання. У випадку пропорційного регулювання регулятор являє собою пропорційну ланку з передатною функцією $W_p(p) = k_p$.

При постійних задавальному впливі і збурюючому впливі

$$g(t) = g_0; f(t) = f_0$$

усталене значення помилки буде дорівнювати

$$\varepsilon_{уст} = \frac{g_0}{1 + k_p k_{op}} - \frac{f_0 k_{op}}{1 + k_p k_{op}} = \frac{g_0}{1 + k} - \frac{f_0 k_{op}}{1 + k},$$

де $k = k_p k_{op}$ - коефіцієнт підсилення розімкненої системи.

Таким чином, у САК із пропорційним регулюванням помилка по задавальному впливу зменшується у $(1+k)$ раз, а по збурюючому у $\frac{k_{op}}{(1+k)}$ раз. Для забезпечення високої точності відтворення задавального впливу і придушення збурюючого впливу, необхідно збільшувати коефіцієнт підсилення розімкненої системи k . Регулювання в цьому випадку виходить статичним, тому що при будь-якому кінцевому значенні k усталена помилка $\varepsilon_{уст}$ буде відмінна від нуля. За умови $k_p \gg k_{op}$ і $k \gg 1$:

$$x_{уст}(t) = g_0 \frac{k}{1+k} + \frac{f_0 k_{op}}{1+k} \cong g_0.$$

Тобто для підвищення точності потрібно збільшити коефіцієнт підсилення регулятора k_{op} .

Інтегральне регулювання. При інтегральному регулюванні регулюючий вплив пропорційний інтегралу від помилки. При цьому регулятор є астатичним (інтегруючим) з передаточною функцією

$$W_p(p) = \frac{k_p}{p}.$$

Усталене значення помилки при впливі $g(t) = g_0$ і $f(t) = f_0$

$$\varepsilon_{уст}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{g_0}{p} \frac{p}{p + k_p k_{op}} - \frac{f_0}{p} \frac{p k_{op}}{p + k_p k_{op}} \right] = 0.$$

Перший доданок визначає помилку по задавальному впливу, а другий - по збуренню.

У загальному випадку при інтегральному регулюванні передаточна функція розімкненої системи має вигляд

$$W(p) = W_p(p) W_{op}(p) = \frac{k_v}{p} \frac{\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)},$$

де k_v - коефіцієнт підсилення розімкненої системи. Фізично він являє собою відношення усталеної швидкості зміни регульованої величини до постійної по величині помилки

$$k_v = \frac{(dx/dt)_{уст}}{\varepsilon_{уст}}.$$

Цей коефіцієнт часто називають добротністю по швидкості САК.

Регулювання може здійснюватися і по другому інтегралу помилки за часом

$$W_p(p) = \frac{k_p}{p^2}.$$

При цьому система буде мати астатизм другого порядку по задавальному впливу. Помилка, обумовлена задавальним впливом, буде дорівнювати нулю не тільки при $g(t) = g_0$, але і при $g(t) = g_0 + g_1 t$.

Підвищення порядку астатизму приводить до підвищення точності САК в усталеному режимі, але збільшує її інерційність (знижує швидкодію), а також приводить до погіршення стійкості.

Ізодромне регулювання. При ізодромному регулюванні здійснюється регулювання по пропорційному й інтегральному законам (ПІ)

$$W_p(p) = \frac{k_1 p + k_2}{p} = k_1 + \frac{k_2}{p}.$$

Ізодромне регулювання з'єднує у собі високу точність інтегрального регулювання (астатизм) з високою швидкодією пропорційного регулювання. У початковий момент часу з появою помилки ПІ-регулятор працює як пропорційний, а з часом як інтегральний. ПІ-регулятор може бути реалізований за допомогою паралельного з'єднання пропорційної й інтегральної ланок або спеціальних ізодромних ланок.

Регулювання по похідних. При регулюванні по першій похідній від помилки регулятор представляє диференціюючу ланку $W_p(p) = p$. Регулювання по похідній не має самостійного значення, тому що в усталеному режимі похідна від помилки дорівнює нулю. Однак воно може відігравати істотну роль у перехідних процесах і взагалі в динаміці як допоміжний засіб, тому що дозволяє враховувати не тільки наявність помилки, але і характер її зміни (збільшення або зменшення). У результаті введення регулювання по похідній від помилки збільшується швидкість реакції системи (підвищується її швидкодія), що призводить до зниження помилок у динаміці (див. докладніше корегувальні ланки).

У загальному випадку закон регулювання може мати складний вигляд і містити окрім члена, пропорційного помилці, також інтеграли (для поліпшення точності) і похідні (для поліпшення динамічних властивостей). У результаті одержують ПІ-, ПД-, ПІД- регулятори.

Тема 1.2. Стійкість лінійних систем автоматичного регулювання

Лекція 5. Поняття стійкості лінійних систем. Необхідна умова стійкості. Алгебраїчні критерії стійкості: Рауса, Гурвіца, Л'єнара-Шипара.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ САК

Поняття стійкості лінеаризованих систем. Стійкість систем автоматичного керування є однією з найважливіших умов її працездатності, тому що стійкість містить у собі вимогу загасання перехідних процесів у часі. Очевидно, що система з розбіжним процесом була б непрацездатною.

Усі реальні системи в техніці й у природі, як правило, є нелінійними. Завжди існує багато факторів, що відхиляють реальні характеристики від лінійних у більшій чи меншій степені. Багато систем можна вважати близькими до лінійних і з необхідної для практики точністю проектувати як лінійні. Для цього здійснюється лінеаризація характеристик і рівнянь усіх реальних ланок системи.

Звернемося до лінійних систем, розглядаючи їх як результат лінеаризації реальних систем, тобто до лінеаризованих систем. Можна сказати, що лінійна система є ідеалізованою (наближеною) математичною моделлю реальної системи.

Під стійкістю лінійної системи розуміють властивість загасання перехідного процесу з часом, інакше кажучи, - наступна властивість власного (вільного) руху системи:

$$x_e(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$

Ця умова буде виконуватися тоді і тільки тоді, коли всі корені $p_i (i=1,2,3,\dots,n)$ характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини. Це ілюструється графіками для складових розв'язків, що відповідають дійсному і парі комплексних коренів (рис. 5.1, а, б).

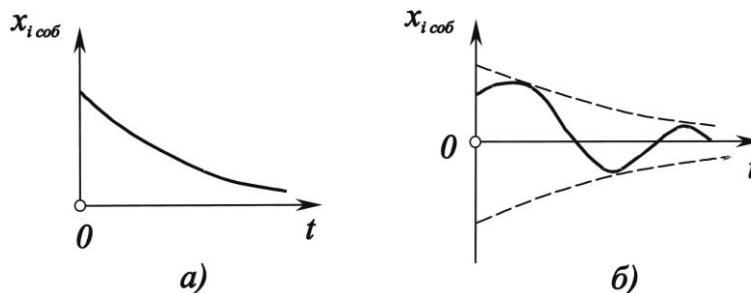


Рис. 5.1.

Якщо ж хоча б один дійсний корінь p_i характеристичного рівняння буде додатнім чи якщо хоча б одна пара комплексних коренів буде мати додатну дійсну частину, то перехідний процес буде розбіжним (рис. 5.2, а, б).

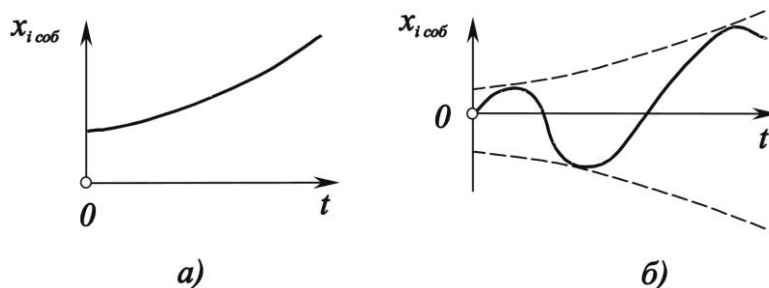


Рис. 5.2.

Якщо в характеристичному рівнянні системи є хоча б один нульовий корінь $p_i = 0$ чи хоча б одна пара чисто уявних коренів ($p_{i,i+1} = \pm j\omega$), а всі інші корені мають від'ємні дійсні частини, то будемо говорити, що система знаходиться на границі стійкості. Це впливає з того, що нульовий корінь можна розглядати як границю між від'ємним і додатнім, а чисто уявний корінь

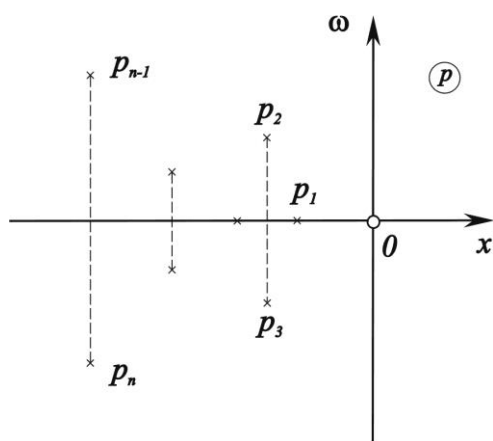


Рис. 5.3.

- як границю між комплексними коренями з від'ємною і додатною дійсними частинами. Поводженням системи на границі стійкості цікавитися не будемо, тому що працездатна система автоматичного регулювання повинна бути стійкою з запасом і не наближатися до цієї границі (рис. 5.3).

Умова стійкості лінійної системи виражається у тім, що всі корені характеристичного рівняння p_i повинні розташовуватися в лівій півплощині комплексної змінної p . Уявна вісь ω площини

коренів служить границею стійкості.

Можна виділити два типи границь стійкості лінійної системи, що характеризуються відповідно:

- 1) нульовим коренем $p_1 = 0$;
- 2) парою чисто уявних коренів $p_{1,2} = \pm j\omega$;

У першому випадку границя стійкості називається аперіодичною, а в другому випадку — коливальною.

Вище була сформульована умова стійкості лінійної системи у вигляді вимоги до коренів характеристичного рівняння. Однак обчислення коренів рівняння високої степені викликає певні труднощі. Тому були виведені критерії стійкості, що дозволяють судити про стійкість або нестійкість системи безпосередньо по коефіцієнтах характеристичного рівняння без обчислення його коренів.

Необхідна умова стійкості. Розглянемо необхідну умову стійкості. Нехай характеристичне рівняння лінійної системи $A(p) = 0$ в розгорнутій формі має вигляд

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 .$$

Доведемо, що необхідною умовою стійкості є додатність усіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, тобто

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_{n-1} > 0 , \text{ якщо } a_n > 0$$

(цьому задовольняє і випадок усіх від'ємних коефіцієнтів, якщо $a_n < 0$, тому що можна поміняти всі знаки на зворотні).

Для доведення розкладемо ліву частину характеристичного рівняння на множники

$$a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0 , \quad a_n > 0$$

Нехай усі його корені мають від'ємні дійсні частини

$$p_1 = -|\alpha_1| , \quad p_{2,3} = -|\alpha_2| \pm j\omega_2 , \dots , \quad p_n = -|\alpha_n| .$$

Підставивши їх у рівняння, одержимо

$$a_n (p + |\alpha_1|)(p + |\alpha_2| - j\omega_2)(p + |\alpha_2| + j\omega_2) \dots (p + |\alpha_n|) = 0 .$$

Оскільки середні два співмножники дають

$$(p + |\alpha_2|)^2 + \omega^2 ,$$

то видно, що після перемноження усіх дужок отримаємо у рівнянні тільки додатні коефіцієнти. Це і необхідно було довести.

Тільки в окремих випадках, коли є рівняння першого чи другого ступеня, додатність коефіцієнтів є необхідною і достатньою умовою (це можна легко перевірити). А при $n \geq 3$ ця умова лише необхідна, але не достатня. Тобто у загальному випадку додатність коефіцієнтів рівняння недостатня для стійкості системи. Справді, додатні коефіцієнти рівняння можуть вийти і при додатних дійсних частинах комплексних коренів.

АЛГЕБРАЇЧНІ КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ

Алгебраїчні критерії стійкості дозволяють судити про стійкість системи за коефіцієнтами характеристичного рівняння

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 .$$

Критерій стійкості Рауса. Цей критерій стійкості був у 1877 р. запропонований англійським математиком Е. Раусом у вигляді деякого правила (алгоритму), який найбільш просто пояснюється наведеною таблицею 5.1.

У першому рядку таблиці записують у порядку зменшення індексів коефіцієнти характеристичного рівняння, що мають парний індекс: $a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, a_{n-6} \dots$; у другому рядку – коефіцієнти з непарними індексами:

$a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5} \dots$. Будь-який з інших коефіцієнтів таблиці визначають як $c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-1}$; де $r_i = \frac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}}$; k - індекс, що означає номер колонки таблиці; i - індекс, що означає номер рядка таблиці.

Табл. 5.1. Таблиця Рауса

Коефіцієнт r_i		КОЛОНКА			
		1 (i)	2	3	
-	1	$a_n = c_{11}$	$a_{n-2} = c_{21}$	$a_{n-3} = c_{31}$...
-	2	$a_{n-1} = c_{12}$	$a_{n-3} = c_{22}$	$a_{n-5} = c_{32}$...
$r_3 = \frac{c_{11}}{c_{12}}$	3	$c_{13} = c_{21} - r_3 c_{22}$	$c_{23} = c_{31} - r_3 c_{32}$	$c_{33} = c_{41} - r_3 c_{42}$...
$r_4 = \frac{c_{12}}{c_{13}}$	4	$c_{14} = c_{22} - r_4 c_{23}$	$c_{24} = c_{32} - r_4 c_{33}$	$c_{34} = c_{42} - r_4 c_{43}$...
$r_5 = \frac{c_{13}}{c_{14}}$	5	$c_{15} = c_{23} - r_5 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_5 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_5 c_{44}$...
...
$r_i = \frac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}}$		$c_{1,i} = c_{2,i-2} - r_i c_{2,i-1}$	$c_{2,i} = c_{3,i-2} - r_i c_{3,i-1}$	$c_{3,i} = c_{4,i-2} - r_i c_{4,i-1}$...
...

Зазначимо, що число рядків таблиці Рауса дорівнює степені характеристичного рівняння плюс одиниця $(n+1)$. Після того, як таблиця Рауса заповнена, по ній можна судити про стійкість системи. Умова стійкості Рауса формується так: для того, щоб система автоматичного регулювання була стійкою, необхідно і достатньо, щоби коефіцієнти першої колонки таблиці Рауса мали однакові знаки, тобто при $a_n > 0$ були додатними:

$$c_{11} = a_n > 0 ; c_{12} = a_{n-1} > 0 ; c_{13} > 0 ; \dots ; c_{1,n+1} > 0.$$

Якщо не всі коефіцієнти першої колонки позитивні, то система нестійка, а число правих коренів (індекс нестійкості) характеристичного рівняння дорівнює числу змін знаку в першій колонці таблиці Рауса.

Критерій Рауса особливо зручний, коли задані числові значення коефіцієнтів характеристичного рівняння. У цьому випадку визначення стійкості можна виконати досить швидко навіть при характеристичних рівняннях високого порядку. Форма алгоритму, за допомогою якого складають таблицю Рауса, дуже зручна для програмування ЕОМ, тому критерій Рауса знайшов широке застосування при дослідженні впливу на стійкість коефіцієнтів характеристичного рівняння, або окремих параметрів системи, які не дуже складним чином входять до цих коефіцієнтів.

Приклад: Нехай характеристичне рівняння системи

$$A(p) = p^6 + 6p^5 + 21p^4 + 44p^3 + 62p^2 + 52p + 100 = 0 .$$

Складемо таблицю Рауса.

ТАБЛИЦЯ РАУСА Приклад (файл окремо)

Маємо дві зміни знака коефіцієнтів першого стовпця: отже, система нестійка, а характеристичне рівняння має два правих корені (індекс нестійкості дорівнює двом).

Критерій стійкості Гурвіца. У 1895 р. німецьким математиком А. Гурвіцем був розроблений алгебраїчний критерій стійкості у формі визначників, що складаються з коефіцієнтів характеристичного рівняння системи.

З коефіцієнтів характеристичного рівняння будують спочатку головний визначник Гурвіца за наступним правилом: *по головній діагоналі визначника зліва направо записують усі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_{n-1} до a_0 в порядку зменшення індексів. Колонки вгору від головної діагоналі доповнюють коефіцієнтами характеристичного рівняння з послідовно спадаючими індексами, а колонки вниз — коефіцієнтами з послідовно зростаючими індексами. На місце коефіцієнтів з індексами більше n (n — порядок характеристичного рівняння) і менше нуля проставляють нулі.*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Відкреслюючи в головному визначнику Гурвіца, як показано пунктиром, діагональні мінори, одержуємо визначники Гурвіца нижчого порядку:

$$\Delta_1 = a_{n-1} ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} ;$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_k \end{vmatrix} .$$

Критерій стійкості Гурвіца: для того щоби система автоматичного керування була стійка, необхідно і достатньо, щоб усі визначники Гурвіца мали знаки, однакові зі знаком старшого коефіцієнта характеристичного рівняння a_n , тобто при $a_n > 0$ були додатними.

Розкриваючи, наприклад, визначники Гурвіца для характеристичних рівнянь першого, другого, третього і четвертого порядків, можна одержати наступні умови стійкості:

1) для рівняння першого порядку ($n = 1$), тобто $a_1 p + a_0 = 0$, умови стійкості

$$a_1 > 0 ; a_0 > 0 ;$$

2) для рівняння другого порядку ($n = 2$), тобто $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$, умови стійкості

$$a_2 > 0 ; a_1 > 0 ; a_0 > 0 ;$$

3) для рівняння третього порядку ($n=3$), тобто $a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$, умови стійкості

$$a_3 > 0 ; a_2 > 0 ; a_1 > 0 ; a_0 > 0 ; a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0 ;$$

4) для рівняння четвертого порядку ($n=4$), тобто $a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$, умови стійкості

$$a_4 > 0 ; a_3 > 0 ; a_2 > 0 ; a_1 > 0 ; a_0 > 0 ;$$
$$a_1(a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_3^2 a_0 > 0 ;$$

Таким чином, необхідною і достатньою умовою стійкості для систем першого і другого порядків є додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Для рівняння третього і четвертого порядків, окрім додатності коефіцієнтів, необхідне виконання додаткових нерівностей. При $n \geq 5$ число подібних додаткових нерівностей зростає, процес розкриття визначників стає досить трудомістким і громіздким. Тому критерій стійкості Гурвіца звичайно застосовують при $n \leq 4$. При $n \geq 5$ доцільно застосовувати сформульований нижче критерій стійкості Ляпунова-Шипара або при використанні критерію стійкості Гурвіца переходити до чисельних методів з використанням ЕОМ.

В останній колонці головного визначника Гурвіца відмінний від нуля тільки один коефіцієнт a_0 , тому $\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$.

Очевидно, що при $a_n > 0$ для перевірки стійкості системи досить знайти тільки визначники Гурвіца від Δ_1 до Δ_{n-1} . Якщо усі визначники Гурвіца нижчого порядку додатні, то система знаходиться на границі стійкості, коли головний визначник дорівнює нулю:

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1} .$$

Остання рівність можлива в двох випадках: $a_0 = 0$ чи $\Delta_{n-1} = 0$. У першому випадку система знаходиться на границі аперіодичної стійкості (один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю); у другому випадку - на границі коливальної стійкості (два комплексно-спряжених корені характеристичного рівняння знаходяться на уявній вісі).

Використовуючи критерій Гурвіца, можна при заданих параметрах системи прийняти за невідомий який-небудь один параметр (наприклад, коефіцієнт підсилення, сталу часу і т.д.) і визначити його граничне (критичне) значення, при якому система буде знаходитися на границі стійкості.

Варто відмітити, що критерій Гурвіца можна одержати з критерію Рауса, тому іноді критерій Гурвіца називають критерієм Рауса-Гурвіца.

Доведено, що в тому випадку, коли всі коефіцієнти характеристичного рівняння додатні ($a_0 > 0 ; a_1 > 0 ; \dots a_n > 0$), з того факту, що додатні усі

визначники $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \dots$ з непарними індексами, впливає і додатність визначників Гурвіца $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \dots$ з парними індексами, і навпаки.

Тому в тих випадках, коли виконані необхідні умови стійкості, тобто $a_0 > 0; a_1 > 0; \dots a_n > 0$, необхідні і достатні умови стійкості зводяться до того, щоб серед визначників Гурвіца $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ були додатні усі визначники з парними (чи усі визначники з непарними) індексами.

Таким чином, для того, щоб система автоматичного керування була стійка, необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні нерівності:

$$\begin{cases} a_0 > 0; & a_1 > 0 & \dots & a_n > 0 \\ \Delta_1 > 0; & \Delta_3 > 0; & \Delta_5 & \dots > 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} a_0 > 0; & a_1 > 0 & \dots & a_n > 0 \\ \Delta_2 > 0; & \Delta_4 > 0; & \Delta_6 & \dots > 0 \end{cases}$$

Останнє формулювання критерію стійкості, назване **критерієм стійкості Лявенара-Шипара**, вимагає розкриття меншого числа визначників, ніж звичайний критерій Гурвіца, а тому особливо зручне при дослідженні стійкості систем автоматичного керування високих порядків.

ЧАСТОТНІ КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ

Критерій стійкості А.В.Михайлова. Критерій Михайлова використовується для визначення стійкості замкнених систем автоматичного регулювання. Для цього використовується крива, яку описує кінець вектора

$$A(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0$$

при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$.

Нехай характеристичний поліном системи

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Після підстановки $p = j\omega$ одержуємо

$$A(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

де

$$\begin{cases} P(\omega) = a_0 - a_2 \omega^2 + \dots + (-1)^n a_n \omega^n \\ Q(\omega) = a_1 \omega - a_3 \omega^3 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \omega^{n-1} \end{cases},$$

де n – парне.

Зображення в площині координат $P(\omega)$ і $Q(\omega)$ при різних значеннях частоти дає криву Михайлова. Оскільки до складу $P(\omega)$ входять лише парні степені ω , то крива симетрична щодо вісі $P(\omega)$.

Відповідно до основної теореми алгебри всякий багаточлен n -й степеня може бути зображений у вигляді добутку двочленів:

$$A(p) = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0,$$

де p_i - корені рівняння $A(p) = 0$.

Розглянемо площину комплексної змінної p (рис. 6.1). Нехай усі корені p_i знаходяться ліворуч від уявної вісі. Розглянемо, як зміниться аргумент

вектора $A(j\omega)$, якщо ω змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. $A(j\omega)$ можна представити як добуток співмножників $(j\omega - p_i)$. Тому зміна аргументу $A(j\omega)$ буде дорівнювати сумі змін аргументів кожного зі співмножників.

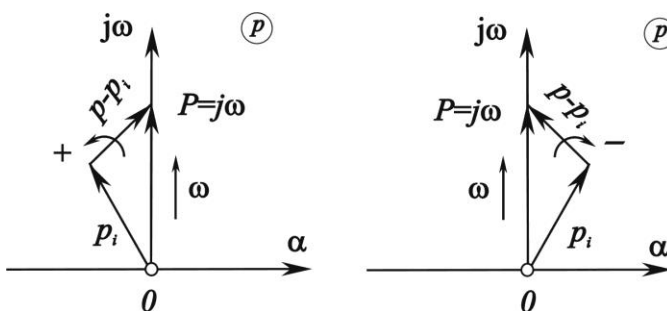


Рис. 6.1.

Якщо всі корені p_i

знаходяться ліворуч від уявної вісі, то зміна аргументу кожного із співмножників $j\omega - p_i$ при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ буде дорівнює π (будемо вважати додатнім напрямком обертання вектора $(j\omega - p_i)$ проти годинникової стрілки), а повна зміна аргументу $A(j\omega)$ буде дорівнювати $n\pi$, де n - вища степінь багаточлена.

Якщо всі корені знаходяться праворуч від уявної вісі, то зміна аргументу кожного співмножника $(j\omega - p_i)$ при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ буде дорівнювати $-\pi$ (вектор $(j\omega - p_i)$ робить поворот за годинниковою стрілкою), а повна зміна аргументу $A(j\omega)$ буде дорівнювати $-n\pi$.

Нехай праворуч від уявної вісі знаходиться $m(m < n)$ коренів. Отже, ліворуч їх буде $n - m$. Зміна ω від $-\infty$ до $+\infty$ викликає повну зміну аргументу $A(j\omega)$ на величину

$$\Delta \arg A(j\omega) = (n - 2m)\pi .$$

Таким чином, про стійкість системи можна судити по збільшенню аргументу $\Delta \arg A(j\omega)$. Так як крива $A(j\omega)$ являє собою симетричну криву щодо вісі абсцис, то можна змінювати ω від 0 до ∞ . Внаслідок симетрії кривої повна зміна аргументу $A(j\omega)$ буде дорівнювати $\pi(n - 2m)/2$.

Сформулюємо критерій стійкості Михайлова: для того щоби лінійна система автоматичного керування, що має характеристичне рівняння n -го порядку, була стійкою, необхідно і достатньо, щоби при зміні ω від 0 до ∞ повна зміна аргументу вектора $A(j\omega)$ повинна дорівнювати $n(\pi/2)$, де n - степінь характеристичного рівняння.

Іншими словами, крива Михайлова повинна бути розташована так, щоб послідовно перетинати n квадрантів.

На рис. 6.2, а зображені криві Михайлова для стійких систем від першого до п'ятого порядків. Криву Михайлова для стійкої системи називають правильною.

На рис. 6.2, б, в показані криві Михайлова для стійкої і нестійкої систем четвертого порядку.

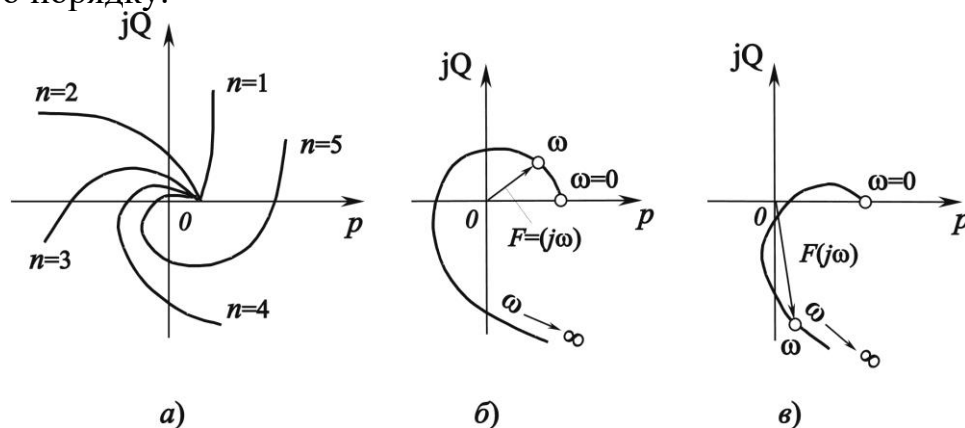


Рис. 6.2.

При виводі критерію Михайлова не розглядалося розташування хоча б одного кореня на уявній вісі. Якщо вектор $A(j\omega)$ має множник $j\omega(p_i = 0)$ (рис. 6.3, а) чи $(j\omega - j\omega_1)(j\omega + j\omega_1)$ (рис. 6.3, б) а, отже, обертається в нуль

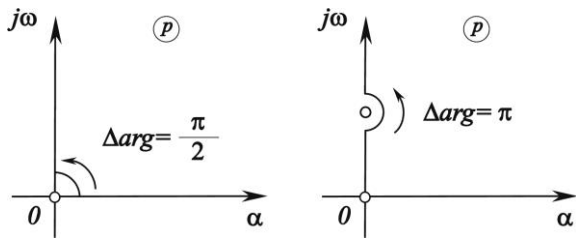


Рис. 6.3.

на початку координат і в спряжених точках $p_1 = \pm j\omega_1$. Аргумент нульового вектора невизначений. Для того щоб внести визначеність, умовимося при русі точки уздовж уявної вісі $-\infty < \omega < \infty$ обходити всі корені, що знаходяться на ній, праворуч по дузі окружності нескінченно малого радіуса. Таким чином, корені на уявній вісі мов би зараховують до коренів лівої напівплощини з нескінченно малою від'ємною дійсною частиною. Формулювання критерію зберігається і при розташуванні коренів на уявній вісі. Наявність коренів на уявній вісі відповідає тому факту, що система знаходиться на границі стійкості і крива Михайлова проходить через початок координат.

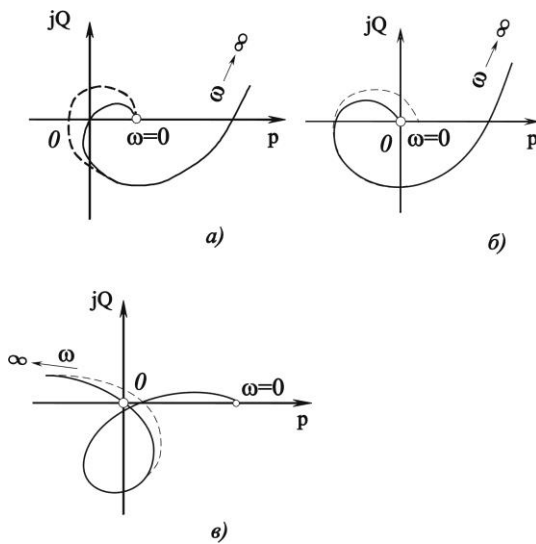


Рис. 6.4.

При перебуванні стійкої системи на границі стійкості можливі два варіанти розташування кривої Михайлова. Один відповідає наявності уявних коренів (рис. 6.4, а), інший - наявності дійсного нульового кореня (рис. 6.4, б). Характерною рисою розташування кривої є те, що нескінченно малою деформацією (зазначеної на рисунку штриховими лініями) можна одержати з неї правильну криву Михайлова.

Таким чином, якщо крива $A(j\omega)$ проходить близько до початку координат, можна говорити, що система знаходиться

поблизу границі стійкості, тобто судити про степінь стійкості. Для нестійкої системи також можливе проходження кривої через нуль, але в цьому випадку нескінченно мала деформація істотно не змінює розташування кривої (рис. 6.4, в).

Критерій стійкості Найквіста. Критерій базується на частотних характеристиках розімкненого кола системи автоматичного керування і дає правило, згідно з яким за виглядом частотної характеристики розімкненого кола можна судити про стійкість замкненої системи. Розглянемо різні випадки.

Система, стійка в розімкненому стані. Передаточна функція розімкненого кола

$$W(p) = \frac{K\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)} = \frac{K(b_n p^m + \dots + 1)}{a_n p^n + \dots + 1}, \quad m < n.$$

Цей випадок відповідає системам автоматичного керування без астатизму.

Введемо допоміжну функцію

$$W_1(p) = 1 + W(p) = \frac{\tilde{A}(p) + K\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)} = \frac{\tilde{D}(p)}{\tilde{A}(p)},$$

де $\tilde{D}(p)$ – характеристичний поліном замкненої системи, а $\tilde{A}(p)$ – характеристичний поліном розімкненого кола цієї системи.

Підставивши $p = j\omega$, одержимо

$$W_1(j\omega) = \frac{\tilde{D}(j\omega)}{\tilde{A}(j\omega)}.$$

За критерієм Михайлова зміна аргументу $A(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ дорівнює $n(\pi/2)$, тому що передбачається, що розімкнене коло стійке. З іншого боку, потрібно, щоб система була стійкою в замкненому стані. Для цього потрібно поставити вимогу, щоб зміна аргументу $\tilde{D}(p)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ також дорівнювала $n(\pi/2)$. Звідси випливає, що зміна аргументу $W_1(j\omega)$ повинна бути:

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = \Delta \arg \tilde{D}(j\omega) - \Delta \arg \tilde{A}(j\omega) = 0.$$

Це значить, що годограф $W_1(j\omega)$ не повинен охоплювати початок координат. Повернемося тепер до функції

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) - 1,$$

що являє собою амплітудно-фазову частотну характеристику розімкненого кола. Годограф $W(j\omega)$ не повинен охоплювати точку $(-1; j0)$ на дійсній вісі.

Звідси одержуємо наступне формулювання **частотного критерію Найквіста**.

Якщо розімкнене коло системи стійке, то для стійкості замкненої системи необхідно і достатньо, щоб амплітудно-фазова частотна характеристика розімкненого кола не охоплювала точку $(-1, j0)$.

Годограф на рис. 6.5, а відповідає випадку, коли стійкість системи порушиться тільки зі збільшенням загального коефіцієнта підсилення розімкненого кола K , а на рис. 6.5, б – випадку, коли і при зменшенні K система може стати нестійкою. Нестійкість замкненої системи ілюструється на рис. 6.6, який приведено нижче.

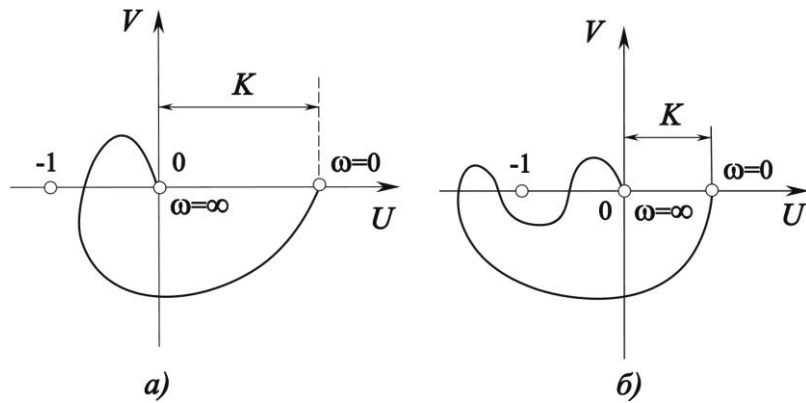


Рис. 6.5.

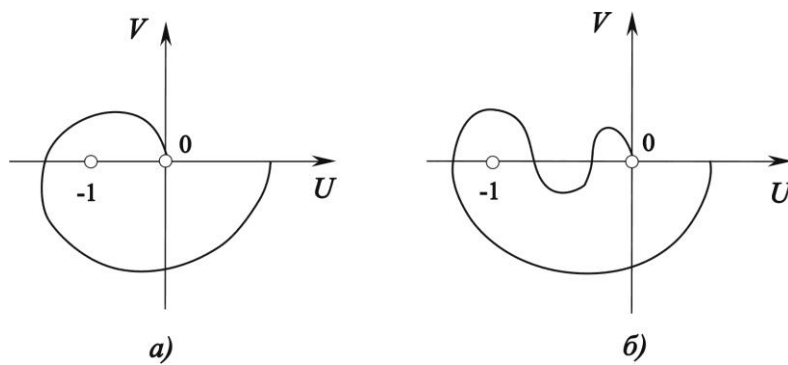


Рис. 6.6.

При складних обрисах амплітудно-фазових характеристик до записаного вище формулювання частотного критерію додається роз'яснення, що розуміти під терміном «неохоплення точки $(-1, j0)$ ». Характеристика може перетинати від'ємну вісь лівіше точки $(-1, j0)$, але тоді число позитивних (зверху вниз) переходів характеристики через вісь абсцис лівіше точки $(-1, j0)$ повинно дорівнювати числу негативних переходів (знизу нагору).

Система, нейтральна в розімкненому стані. Характеристичний поліном розімкненого кола $\tilde{A}(p)$ має нульові корені, а всі інші корені мають від'ємні дійсні частини. Передаточна функція розімкненого кола $W(p)$ має відповідно нульові полюси:

$$W(p) = \frac{K\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)} = \frac{K(b_n p^m + \dots + 1)}{p^\nu (a_{n-\nu} p^{n-\nu} + \dots + 1)}, m < n.$$

Це відповідає астатичним системам, причому ν - порядок астатизму. Розглянемо спочатку випадок $\nu = 1$, тобто $\tilde{A}(p) = p(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + 1)$.

Площина коренів $\tilde{A}(p)$ має вигляд, приблизно, як показано на рис. а. Підстановка $p = j\omega$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ означає переміщення уздовж вісі ω від

точки 0 нагору (рис. 6.7, а). При цьому, щоби усі корені залишити ліворуч, обійдемо точку 0 по окружності малого радіуса

$$p = \rho e^{j\phi}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тоді при $p \rightarrow 0$ одержимо

$$W(p) \rightarrow \frac{K}{p} = \frac{K}{\rho e^{j\phi}} = K R e^{-j\phi}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},$$

де $R \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$. Отже, точці $\omega = 0$ площини коренів відповідає на характеристиці $W(j\omega)$ чверть окружності нескінченного радіуса (рис. 6.7, б).

Оскільки при цьому всі корені $\tilde{A}(p)$ залишалися ліворуч, то формулювання критерію стійкості залишається таким же, як і для випадку стійкого розімкненого кола, а саме: не повинна охоплюватися точка $(-1, j0)$.

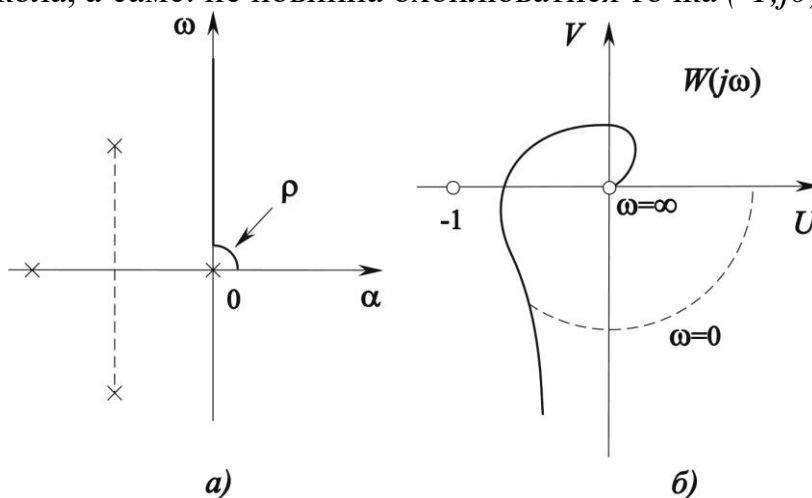


Рис. 6.7.

У випадку $\nu = 2$ і $\nu = 3$ аналогічно одержуємо таке ж формулювання критерію – неохоплення точки $(-1, j0)$, як показано на рис. 6.7.

Для складних обрисів амплітудно-фазових характеристик у число негативних переходів треба включати і перехід пунктирної окружності нескінченно великого радіусу при $\omega = 0$ (рис. 6.8.).

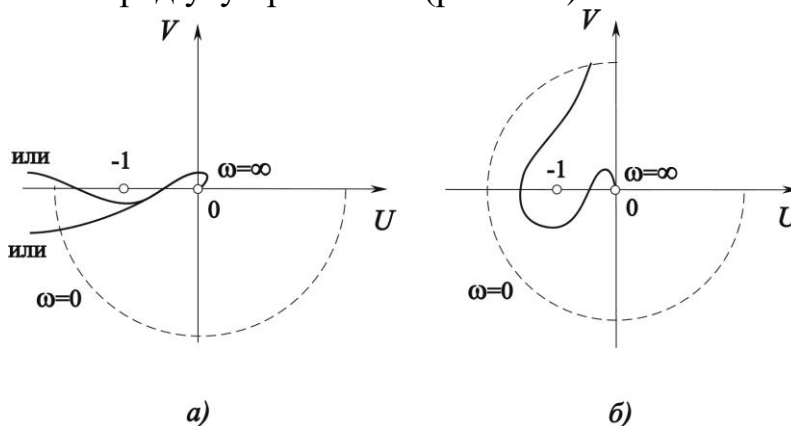


Рис. 6.8.

Система з нестійким розімкненим колом. Нехай характеристичний поліном $\tilde{A}(p)$ розімкненого кола має l коренів з додатною дійсною частиною (індекс нестійкості системи).

Тоді введена вище допоміжна функція

$$W_1(p) = 1 + W(p) = \frac{\tilde{D}(p)}{\tilde{A}(p)}$$

при заміні $p = j\omega$ відповідно до критерія Михайлова для стійкості замкненої системи, повинна мати наступну зміну аргументу при $0 \leq \omega \leq \infty$:

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = \Delta \arg \tilde{D}(j\omega) - \Delta \arg \tilde{L}(j\omega) = n \frac{\pi}{2} - (n - 2l) \frac{\pi}{2} = l\pi.$$

Це значить, що для стійкості замкненої системи потрібно, щоб амплітудно-фазова характеристика розімкненого кола охоплювала точку $(-1, j0)$ проти годинникової стрілки на кут $l\pi$, де l — число полюсів з додатною дійсною частиною в передаточній функції нестійкого розімкненого кола даної системи.

Іншими словами, лівіше точки $(-1, j0)$ різниця поміж числом позитивних та числом негативних переходів амплітудно-фазової частотної характеристики через вісь абсцис повинна дорівнювати $l/2$.

Наприклад, якщо передаточна функція розімкненого кола

$$W(p) = \frac{K(b_n p^m + \dots + 1)}{a_n p^n + \dots - 1},$$

має один додатний полюс ($l=1$), то для стійкості замкненої системи амплітудно-фазова частотна характеристика розімкненого кола повинна мати вигляд, приблизно як показано на рис. 6.9, а або б, а у випадку $l=3$ — на рис. 6.9, в. При цьому початкова точка характеристики на вісі абсцис лівіше $(-1, j0)$ вважається за половину переходу.

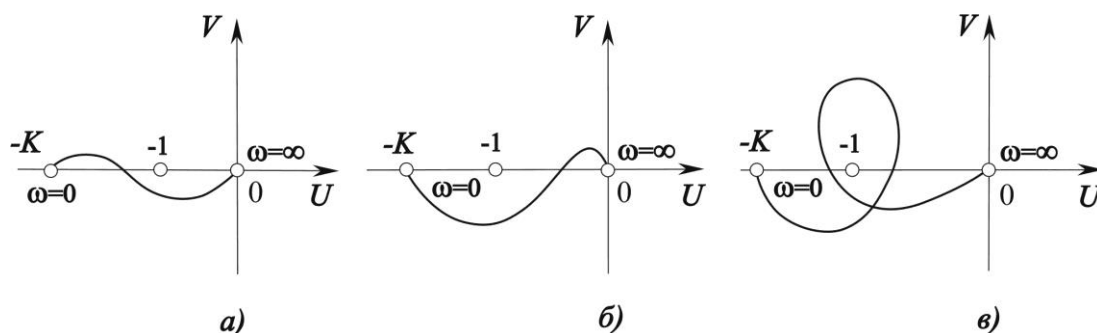


Рис. 6.9.

ВИКОРИСТАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Критерій Боде. Звернемося спочатку до перших двох випадків: розімкнене коло системи стійке чи нейтральне (астатична замкнена система). Як було показано раніше амплітудно-фазова частотна характеристика розімкненого кола не повинна охоплювати точку $(-1, j0)$. Це означає, що повинно бути

$$W(\omega) < 1 \text{ або } Lm = 20 \lg W < 0 \text{ при } \varphi = -180^\circ.$$

В свою чергу, це означає, що точка перетину фазової характеристики з лінією -180° повинна лежати правіше частоти зрізу, тобто правіше точки перетину амплітудної характеристики з віссю абсцис. Лівіше цієї точки при складних обрисах ЛАХ може бути парне число перетинів фазової характеристики з лінією -180° відповідно до правила рівності позитивних і негативних переходів (як показано пунктиром на рис. 7.1).

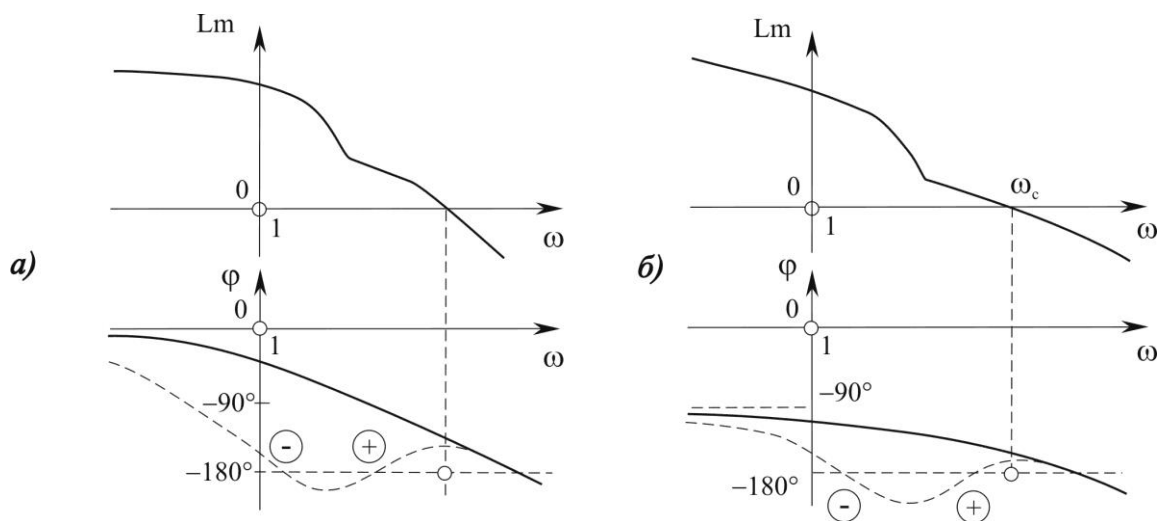


Рис. 7.1.

Перший графік (рис. 7.1, а) відповідає системі без астатизму, а другий (рис. 7.1, б) – системі з астатизмом першого порядку. При підрахунку точок перетину фазової характеристики з лінією -180° треба мати на увазі, що, якщо початок фазової характеристики лежить нижче лінії -180° то до числа негативних переходів треба включати нескінченно віддалену вліво точку $\omega = 0$.

Розглянемо випадок, коли розімкнене коло нестійке (рис. 7.2), тобто $\tilde{A}(p)$ має l коренів з додатною дійсною частиною. У цьому випадку різниця поміж числом позитивних і числом негативних переходів фазової характеристики

через лінію -180° лівіше частоти зрізу ω_z (де $Lm = 0$) повинно дорівнювати $l/2$. Тут позитивним вважається перехід знизу нагору. При цьому початок характеристики в нескінченно віддаленій точці $\omega = 0$ на лінії -180° вважається за половину переходу.

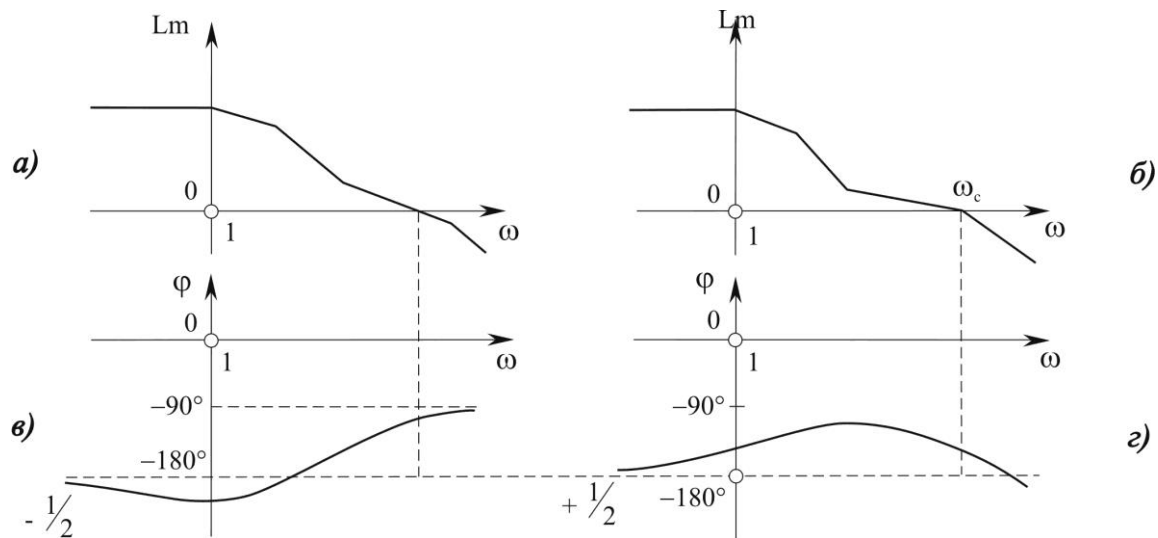


Рис. 7.2.

СИСТЕМИ З ЗАПІЗНЕННЯМ

Системою з запізненням називається система, що містить принаймні одну ланку, реакція на виході якої відстає у часі на деяку величину τ .

Наприклад, аперіодична ланка з запізненням, замість звичайного $T \frac{dx}{dt} + x = kg$, буде описуватися рівнянням із запізнюючим аргументом

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = kg(t - \tau).$$

Це значить, що реакція ланки, наприклад, на одиничний стрибок (тобто перехідна функція) замість звичайної (рис. 7.3, а) буде мати вигляд, зображений на рис.7.3, б.

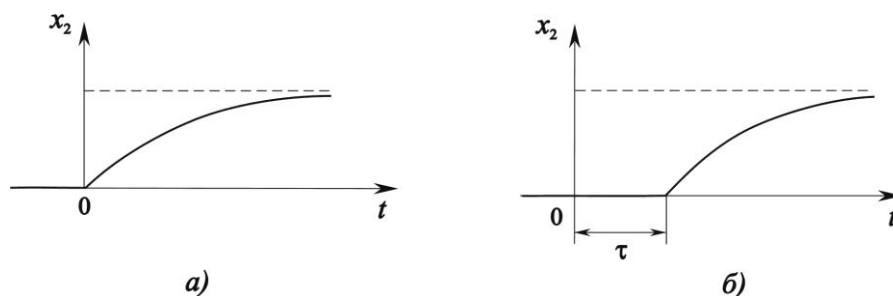


Рис. 7.3.

Передаточна функція ланки чистого запізнювання з рівнянням $x(t) = g(t - \tau)$ має вигляд

$$W(p) = e^{-p\tau}.$$

Будемо розглядати тільки такі системи, у яких по всіх процесах величина запізнення τ залишається постійною.

Прикладами такого роду ланок із запізненням можуть служити: акустична лінія зв'язку (τ – час проходження звуку в середовищі), радіолінія зв'язку Земля – Місяць, дозування речовини з переміщенням її на стрічковому транспортері (τ – час руху між визначеними точками), вимірювання товщини прокату на визначеній відстані від регульованих валків. Якщо послідовно з'єднати N аперіодичних ланок, то передаточна функція буде визначається виразом

$$W(p) = \frac{1}{(1 + Tp)^N}.$$

Якщо покласти $T = \tau/N$, то для досить великих N

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \frac{\tau}{N} p)^{-N} = e^{-p\tau}.$$

Розглянемо частотні характеристики ланки запізнення, а також її вплив на частотні характеристики системи. АФЧХ ланки запізнювання $W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$. ФЧХ – $\varphi(\omega) = -\omega\tau$, ЛАХ – $L(\omega) = 20 \lg W(\omega) = 0$ (рис. 7.4).

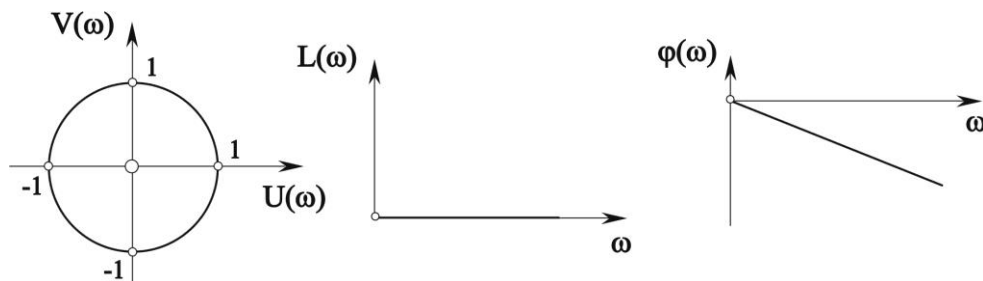


Рис. 7.4.

При послідовному з'єднанні ланки системи з передаточною функцією $W_0(p)$ і ланки запізнення $W(p) = e^{-p\tau}$ одержуємо $W(p) = W_0(p)e^{-p\tau}$.

Амплітудно-фазова частотна характеристика буде

$$W(j\omega) = W_0(j\omega)e^{-j\omega\tau},$$

так що амплітудна і фазова частотні характеристики приймають вигляд

$$W(\omega) = W_0(\omega), \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) - \tau\omega,$$

тобто наявність елемента запізнювання не змінює амплітудної частотної характеристики, але істотно впливає на фазову частотну характеристику, причому $\varphi(\omega) \rightarrow -\infty$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Тому кожне положення вектору $W(\omega)$ повертаються у від'ємну сторону на кут $\tau\omega$ і крива $W(j\omega)$ приймає спіральну форму, асимптотично наближаючись до початку координат (рис.7.5, а). Логарифмічні частотні характеристики набувають вигляду, що наведений на рис.7.5, б.

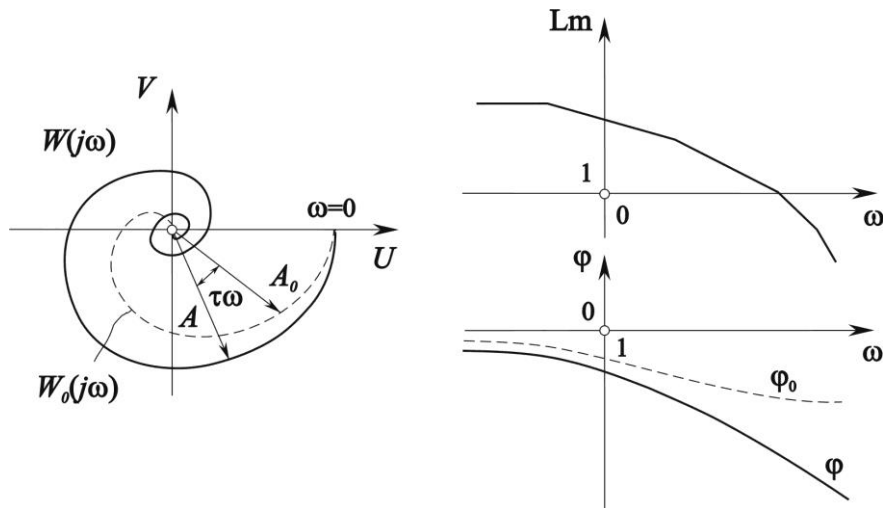


Рис. 7.5.

Звернемося тепер до дослідження стійкості замкненої системи з запізненням (рис. 7.6).

Характеристичне рівняння системи з запізнюванням буде трансцендентним

$$\tilde{A}(p) + K\tilde{B}(p)e^{-\tau p} = 0.$$

Тому алгебраїчні критерії стійкості (критерії Гурвіца і Рауса) неприйнятні.

Критерії Михайлова і Найквіста для систем із запізнюванням зберігають свої звичайні формулювання. Змінюється лише форма годографів. Розглянемо систему

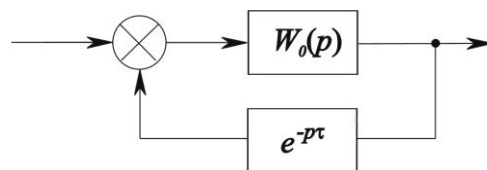


Рис. 7.6.

Передаточна функція ланки прямої передачі енергії:

$$W_0(p) = \frac{K}{1 + Tp};$$

Передаточна функція розімкненого кола $W(p) = W_0(p)e^{-p\tau} = \frac{Ke^{-p\tau}}{1 + Tp}$.

ЛАХ розімкненого кола $L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$.
 ЛАХ і ФЧХ зображені на рис. 7.7.

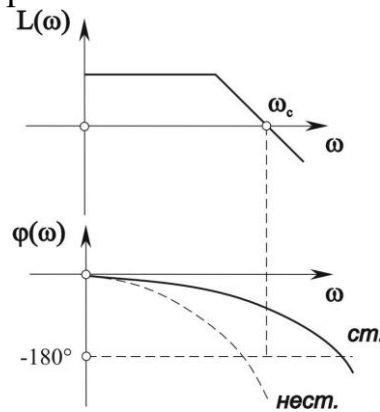


Рис. 7.7.

Визначимо частоту зрізу $L(\omega_z) = 0$.

$$W(\omega_z) = 1 = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_z^2 T^2}} ;$$

$$\omega_z = \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{T} .$$

Границя стійкості характеризується тим, що на частоті зрізу фазовий зсув досягає -180° , тобто

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \varphi_z(\omega) = -\pi .$$

$$\varphi(\omega_z) = -\arctg \omega_z T - \omega_z \tau_{кр} = -\pi ,$$

де $\tau_{кр}$ - критичне запізнення. Розв'язуючи відносно $\tau_{кр}$, одержуємо

$$\tau_{кр} = \frac{\pi - \arctg \sqrt{K^2 - 1}}{\sqrt{K^2 - 1}} T .$$

На рис. 7.8 показана отримана крива залежності відносного критичного запізнювання τ/T від коефіцієнта підсилення K . Як бачимо, при $\tau > \tau_{кр}$

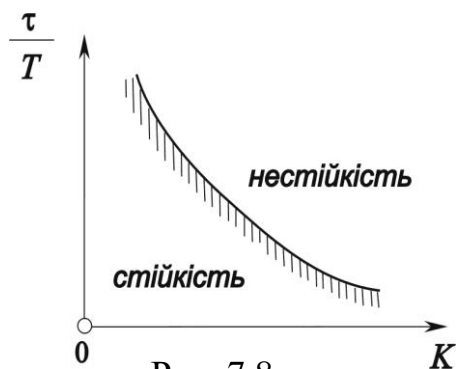


Рис. 7.8.

система стає нестійкою, хоча при відсутності запізнювання ця система стійка при будь-якому K .

У тих випадках, коли ланка запізнення знаходиться в місцевому зворотному зв'язку, її вплив буде зовсім іншим. В залежності від структури системи він може виявитися і сприятливим, тобто може поліпшувати стійкість системи.

Тема 1.3. Оцінка якості процесу керування. Підвищення точності систем автоматичного регулювання

Лекція 8. Оцінки якості перехідного процесу. Частотні оцінки якості: запас стійкості за амплітудою та фазою, показник коливальності

ОЦІНКИ ЯКОСТІ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ

Вимоги якості і зв'язок з частотними характеристиками. Стійкість системи забезпечує загасання перехідних процесів з часом, тобто забезпечує принципову можливість приходу системи в деякий сталий стан при будь-якій зовнішній збуренні.

Однак далі потрібно, по-перше, щоб цей сталий стан був достатньо близьким до заданого і, по-друге, щоб загасання перехідного процесу було досить швидким, а відхилення (коливання) при цьому були б невеликі. Тому після забезпечення стійкості системи потрібно подбати про необхідну якість процесу керування, у поняття якого входять, зокрема:

- 1) точність системи в усталеному стані,
- 2) якість перехідного процесу.

Методи визначення точності системи були розглянуті раніше (статичні і швидкісні помилки). При проектуванні системи на початку не потрібно знати деталей обрисів всієї кривої перехідного процесу, а треба виходити з таких основних характеристик якості як (див. рис. 8.1): тривалість перехідного процесу

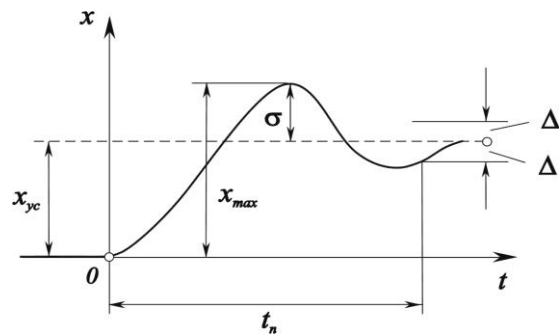


Рис. 8.1.

t_n (швидкодія), величина перерегулювання σ , кількість (чи частота) коливань, іноді плавність процесу (обмеження по швидкості і прискоренню). Теоретично перехідний процес у стійкій лінійній системі загасає в нескінченності:

$$x - x_{yc} = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Практично ж тривалість перехідного процесу обмежують тим моментом, коли відхилення стають нехтувано малими, наприклад, величина $\Delta = |x - x_{yc}|$ складає 5% від x_{yc} (рис. 8.2). Перерегулювання $\sigma = x_{\max} - x_{yc}$ визначається також у відсотках від величини x_{yc} (скажімо: 18—

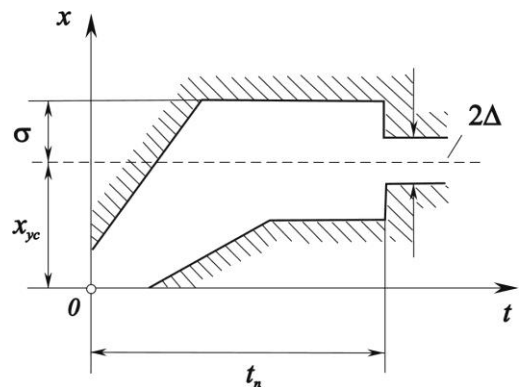


Рис. 8.2.

30%). При $\sigma = 0$ процес називається монотонним.

Таким чином, не грають ролі деталі обрису кривої перехідного процесу, а важливо, щоб вона не виходила за визначені границі. Існують три основні види наближених оцінок якості перехідного процесу: 1) частотні; 2) кореневі; 3) інтегральні.

Будемо розглядати перехідний процес $x(t)$ при одиничному стрибку задавального впливу $g(t)=1(t)$. У зображеннях $X(p)=W_g(p)G(p)$, $G(p)=\frac{1}{p}$, де $W_g(p)$ — головна передаточна функція замкненої системи.

ЧАСТОТНІ ОЦІНКИ ЯКОСТІ

Найпростішою з частотних оцінок якості перехідного процесу є запас стійкості. Він визначає тільки ступінь близькості замкненої системи до границі стійкості по виду частотних характеристик її розімкненого кола.

На рис. 8.3, а показано як знаходити запас за амплітудою ΔLm і запас за фазою $\Delta\varphi$ по логарифмічних частотних характеристиках. Якщо перенести їх на амплітудно-фазову частотну характеристику, то це буде відповідно ΔA і $\Delta\varphi$ рис.8.3, б.

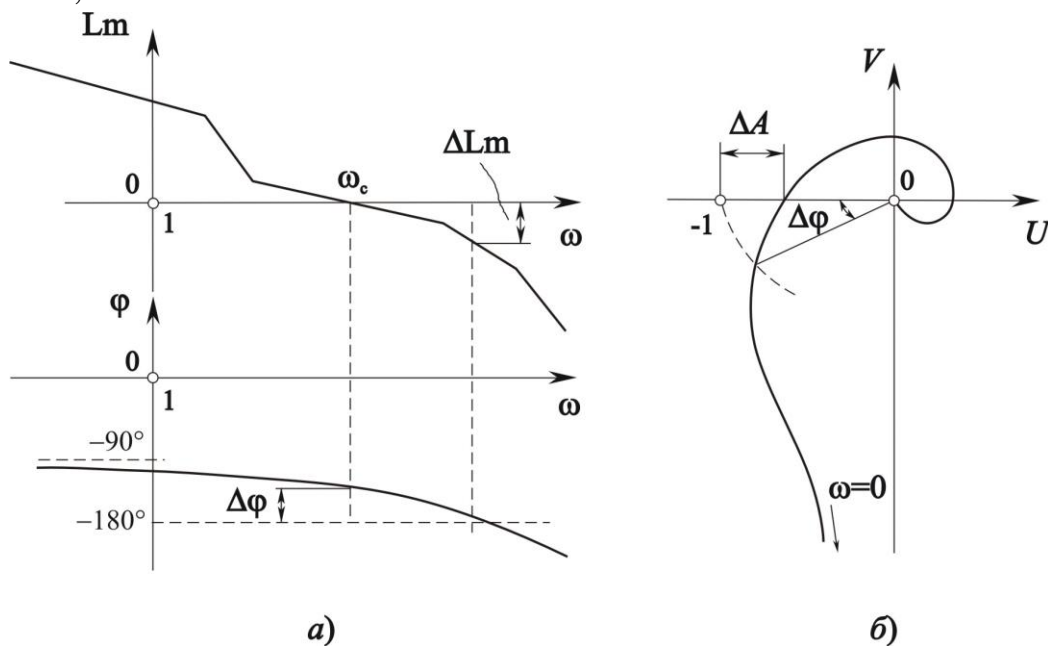


Рис. 8.3.

Тривалість перехідного процесу і перерегулювання можна приблизно оцінити по вигляду дійсної частотної характеристики замкненої системи $P(\omega)$.

$$W_g(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

У перехідному процесі вийде перерегулювання $\sigma > 18\%$, якщо $P(\omega)$ має горб (рис. 8.4, а). При відсутності горба (рис. 8.4, б) буде $\sigma < 18\%$. Процес виявиться напевно монотонним ($\sigma = 0$), якщо $\frac{dP}{d\omega} < 0$ і монотонно спадає за абсолютним значенням (рис. 8.4, в).

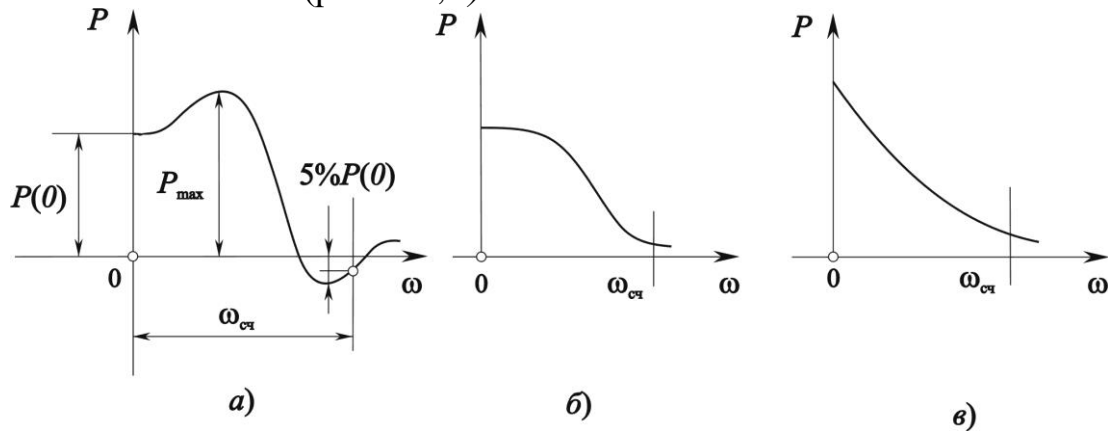


Рис. 8.4.

Тривалість перехідного процесу оцінюється приблизно за величиною інтервалу істотних частот ω_{iq} , причому

$$\frac{\pi}{\omega_{iq}} < t_n < \frac{4\pi}{\omega_{iq}}.$$

Важливо відзначити, що час t_n обернено пропорційний величині ω_{iq} , тобто чим більш розтягнута частотна характеристика, тим коротше перехідний процес. Фізично це зв'язано з тим, що чим більш високі частоти «пропускає» система, тим вона менш інерційна у своїх реакціях на зовнішні впливи.

Ця ж властивість дозволяє зв'язати час t_n з частотою зрізу характеристики розімкненого кола. Тривалість перехідного процесу t_n тим менше, чим більша частота зрізу $\omega_{c\kappa}$. Залежність між величинами σ , t_n , ω_c , і P_{\max} зображена графіком на рис. 8.5.

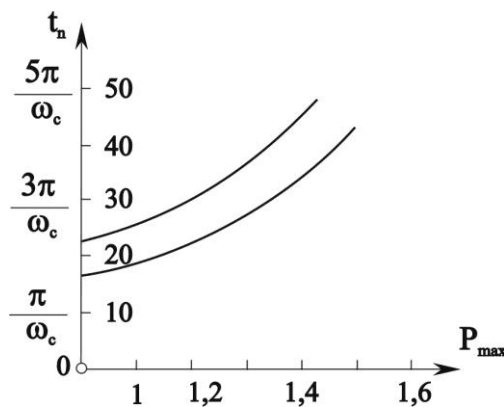


Рис. 8.5.

Крім того, властивість частотних характеристик така, що початкова їхня частина впливає в основному на обрис кінця перехідного процесу $x(t)$, причому $P(0) = x_{yc}$. Основний же вплив на якість перехідного процесу дає форма середньої частини частотної характеристики.

У зв'язку з цим логарифмічну частотну характеристику розімкненого кола системи $Lm(\omega)$ поділяють на три області (рис. 8.6) причому область низьких частот в основному визначає точність в усталеному режимі (зокрема, астатизм і сталу помилку на робочій частоті слідкуючої системи).

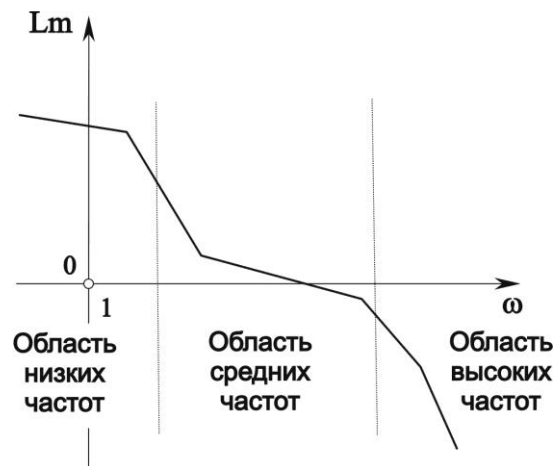


Рис. 8.6.

Область високих частот не грає істотної ролі, а область середніх частот в основному визначає якість перехідного процесу. Зокрема, частота зрізу ω_z , як уже говорилося, визначає смугу пропускання сигналів і тривалість перехідного процесу. Нахил $Lm(\omega)$ поблизу частоти зрізу ω_z характеризує коливальність перехідного процесу. Так, нахил — 20 дб/дек при $\omega = \omega_z$ відповідний властивостям аперіодичної ланки, забезпечує найменшу коливальність перехідного процесу в замкненій системі.

Наступною частотною оцінкою якості є показник коливальності — максимальне значення (M_{\max}) амплітудної частотної характеристики замкненої системи:

$$M = |W_g(j\omega)|.$$

Ця величина M_{\max} може бути визначена по виду частотної характеристики розімкненого кола даної системи. Справді

$$M = |W_g(j\omega)| = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right| = \left| \frac{U + jV}{1 + U + jV} \right| = \sqrt{\frac{U^2 + V^2}{(1 + U)^2 + V^2}}.$$

Звідси

$$U^2 + V^2 = M^2[(1 + U)^2 + V^2] \quad \text{або} \quad (U + C)^2 + V^2 = R^2, \quad \text{де}$$

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1}, \quad R = \frac{M}{M^2 - 1}$$

Отже, лінії рівних значень величини M , нанесені на площини $W(j\omega)$, будуть окружностями з центром C та мінливим радіусом R , як показано на рис. 8.7.

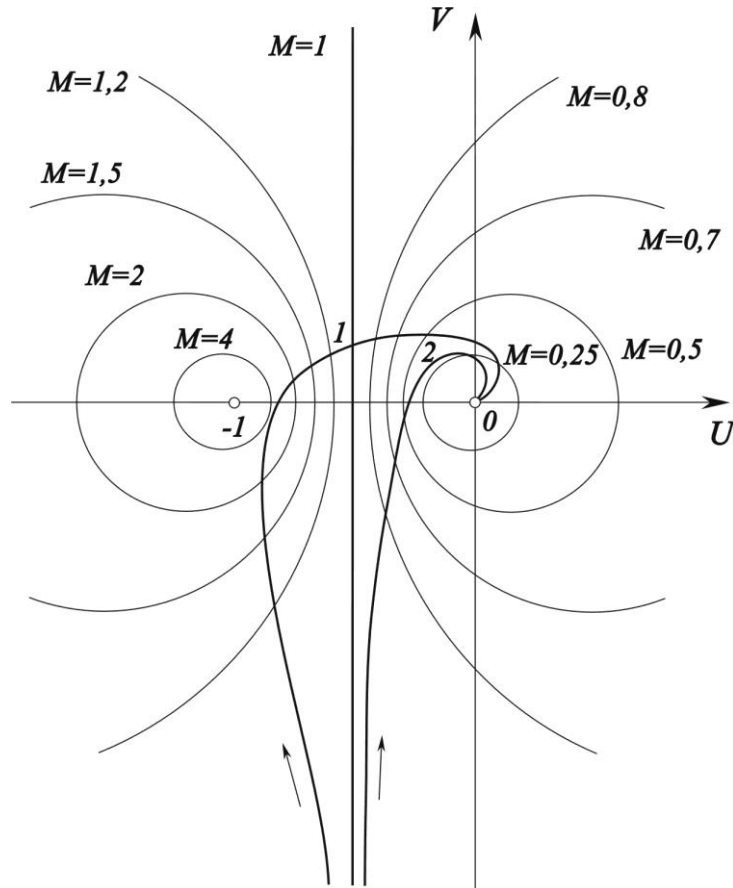


Рис. 8.7.

Маючи таку діаграму ліній $M = \text{const}$, можна по заданій амплітудно-фазовій характеристиці розімкненого кола $W(j\omega)$ легко визначити показник коливальності M_{\max} , і побудувати амплітудну частотну характеристику $M = |W_g(j\omega)|$ замкненої системи (рис. 8.8).

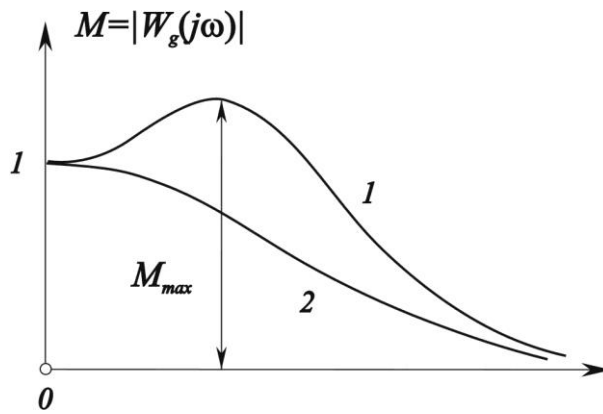


Рис. 8.8.

Якщо, наприклад, бажано мати $M_{\max} < 1,5$, то характеристику 1 потрібно скорегувати так, щоб вона не заходила усередину кола $M = 1,5$ (рис. 8.9, а)

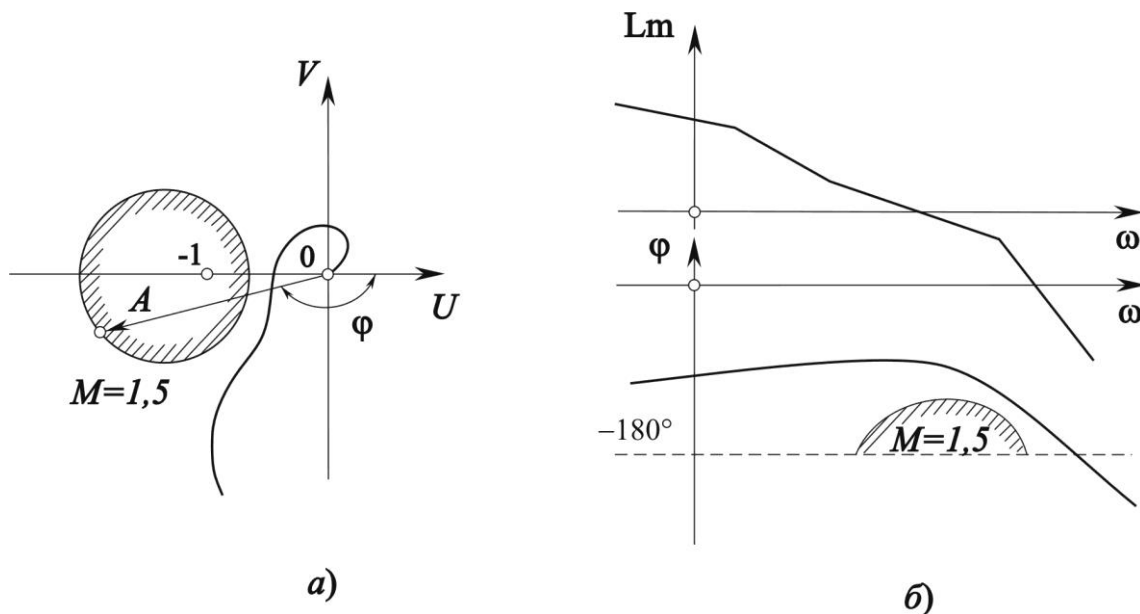


Рис. 8.9.

Таку заборонену область можна перенести на площину логарифмічної частотної характеристики в такий спосіб. На кривій $M = 1,5$ (рис. 8.9, а) у кожній точці маємо визначене значення амплітуди A і фази φ . Отже, знаючи $Lm(\omega)$ (рис. 8.9, б), можемо для кожного значення $Lm = 20 \lg A$ нанести відповідну точку φ . Таким чином, утвориться крива $M = 1,5$ на полі логарифмічних характеристик, що окреслює заборонену зону, у яку не повинна заходити фазова частотна характеристика $\varphi(\omega)$.

Лекція 9. Кореневі оцінки якості: степінь стійкості, коливальність, діаграма Вишнеградського. Інтегральні оцінки якості

КОРЕНЕВІ ОЦІНКИ ЯКОСТІ

Кореневими оцінками називаються такі, які ґрунтуються на розташуванні коренів характеристичного рівняння замкненої системи, тобто полюсів передаточної функції замкненої системи, а також і нулів цієї передаточної функції.

Степінь стійкості — відстань η від уявної вісі до найближчого кореня на площині коренів характеристичного рівняння замкненої системи.

Якщо найближчим є дійсний корінь (рис. 9.1, а), то йому відповідає аперіодична складова розв'язку перехідного процесу

$$C_1 e^{-\eta t},$$

(аперіодична степінь стійкості η). Час її загасання

$$t_n = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} \approx \frac{3}{\eta} \quad (\text{при } \Delta = 5\%)$$

характеризує загальну тривалість перехідного процесу, так як всі члени розв'язку, що відповідають іншим кореням, загасають швидше.

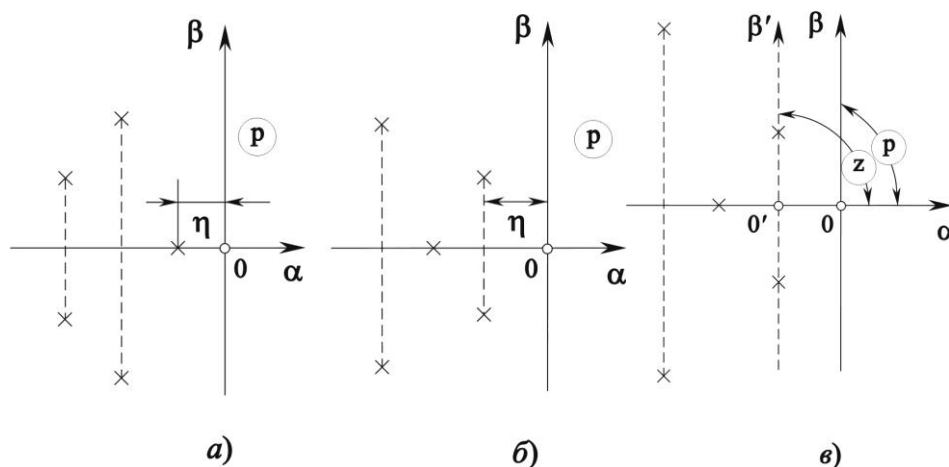


Рис. 9.1.

Якщо ж найближчим до уявної вісі виявиться пара комплексних коренів (рис.82, б), то домінуюча складова розв'язку перехідного процесу

$$C_1 e^{-\eta t} \sin(\beta t + C_2)$$

буде коливальною (коливальний степінь стійкості η), причому оцінка тривалості перехідного процесу t_n залишається такою ж.

Визначається величина степеня стійкості в таким чином. Вводиться нова комплексна змінна $z = p + \eta$ (рис.82, в). Тоді на площині z уявна вісь β'

пройде через найближчі корені, тобто розв'язок складеного відносно z характеристичного рівняння повинне лежати на границі стійкості.

Таким чином, якщо задане характеристичне рівняння

$$\tilde{A}(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 ,$$

то підставивши $p = z - \eta$ отримаємо

$$a_n (z - \eta)^n + a_{n-1} (z - \eta)^{n-1} + \dots + a_1 (z - \eta) + a_0 = 0 ,$$

Нове рівняння, що називається зміщеним буде мати вигляд

$$a_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_1 z + A_0 = 0 (*),$$

де коефіцієнти A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , є функціями η .

Потім до рівняння (*) застосовується умова розташування його коренів на границі стійкості, наприклад за критерієм Гурвіца

$$A_n(\eta) = 0 \text{ і } \Delta_{n-1}(\eta) = 0 ,$$

звідки і визначається величина η .

Коливальність перехідного процесу визначається величиною

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| ,$$

де α і β — дійсна і уявна частини коренів характеристичного рівняння. Саме ця величина характеризує швидкість затухання амплітуди коливань за кожен період. Справді, парі комплексних коренів $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ відповідає складова розв'язку перехідного процесу

$$C_1 e^{-\eta t} \sin(\beta_1 t + C_2) .$$

Період коливань дорівнює $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Через один період амплітуда

$$C_1 e^{-|\alpha|t} \text{ зменшується до величини } C_1 e^{-|\alpha|\left(t + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = C_1 e^{-|\alpha|t} e^{-2\pi \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|} .$$

Отже, чим більша величина $\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$, названа коливальністю, тим слабкіше

буде загасання коливань у перехідному процесі. Лінія $\mu = const$ утворить центральний кут (рис. 9.2, а) на комплексній площині коренів.

Сумарна вимога визначених значень ступеня стійкості η і коливальності μ призводить до області, зображеної на рис. 9.2, б, усередині якої повинні лежати всі корені характеристичного рівняння замкненої системи.

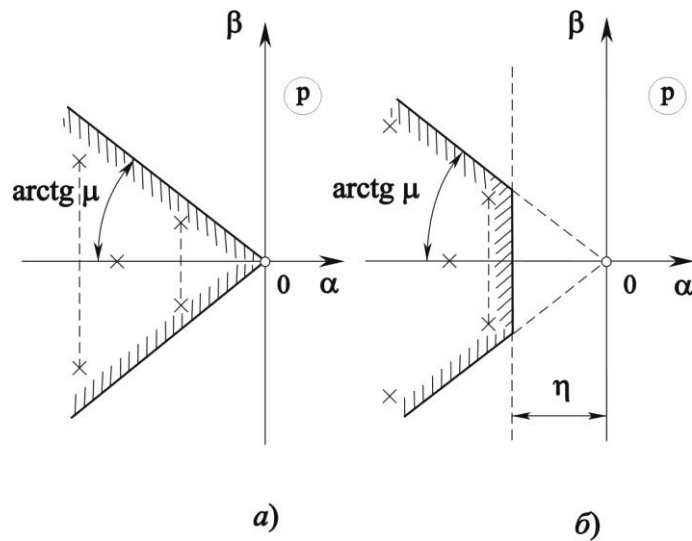


Рис. 9.2.

Для визначення якості перехідного процесу при одиничному стрибку зовнішнього впливу істотні не тільки корені характеристичного рівняння, тобто *полюса*, але також і *нули передаточної функції* замкненої системи $W_g(p)$. Зазначимо, що нулі для замкненої системи $W_g(p)$ збігаються з нулями розімкненого кола $W(p)$, так як

$$W_g(p) = \frac{KB(p)}{D(p)}, \quad W(p) = \frac{KB(p)}{A(p)}, \quad D(p) = A(p) + KB(p)$$

а полюси $W_g(p)$ й $W(p)$ істотно відрізняються один від одного.

Можна показати, що для зменшення амплітуд відхилень у перехідному процесі бажано, щоб нулі передаточної функції замкненої системи $W_g(p)$ розташовувалися поблизу її полюсів.

Прикладом кореневих оцінок якості перехідного процесу в системах третього порядку є **діаграма Вишнеградського** (дана в його роботі 1876 р., що поклала початок розвитку теорії автоматичного регулювання). Характеристичне рівняння системи третього порядку

$$A(p)^2 a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0,$$

зводиться до нормованого вигляду

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0,$$

де

$$q = p^3 \sqrt{\frac{a_3}{a_0}}, \quad A = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3^2 a_0}}, \quad B = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3 a_0^2}}.$$

Параметри Вишнеградського A і B представляють певні комбінації реальних параметрів системи, що входять до коефіцієнтів характеристичного рівняння.

На площині параметрів (A, B) границя стійкості виразиться залежністю $AB = 1$ (гіпербола).

Область стійкості $AB > 1$ розбивається на три підобласті з різним розташуванням коренів характеристичного рівняння і відповідно – обрисів перехідного процесу (рис. 9.3).

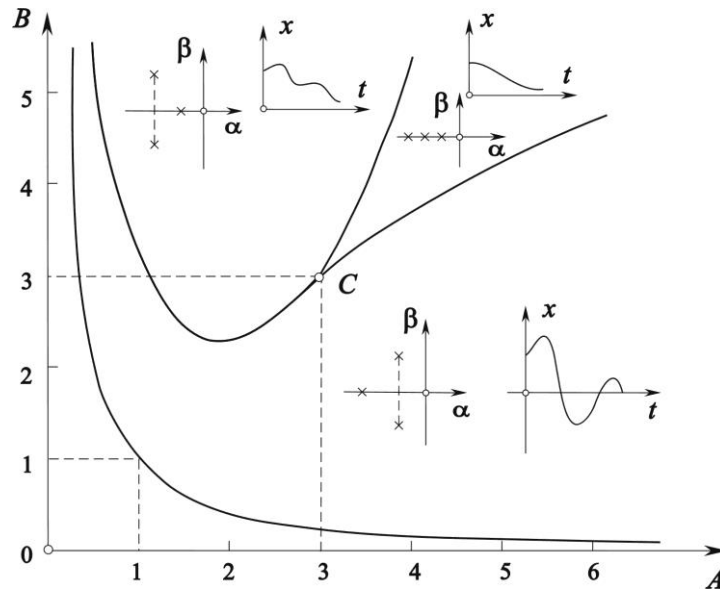


Рис. 9.3.

ІНТЕГРАЛЬНІ ОЦІНКИ ЯКОСТІ

Інтегральними оцінками якості називаються такі, які одним числом оцінюють і величини відхилень і час загасання перехідного процесу. Будемо відхилення x у перехідному процесі відраховувати від нового усталеного стану, так що $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Для монотонного процесу (рис. 9.4, а) інтегральною оцінкою може служити площа під кривою перехідного процесу, тобто
$$I_1 = \int_0^{\infty} x(t) dt.$$

Цей інтеграл має кінцеве значення для будь-якого розв'язку $x(t)$ лінійного рівняння. Тут процес буде вважатися тим краще, чим менше число I_1 .

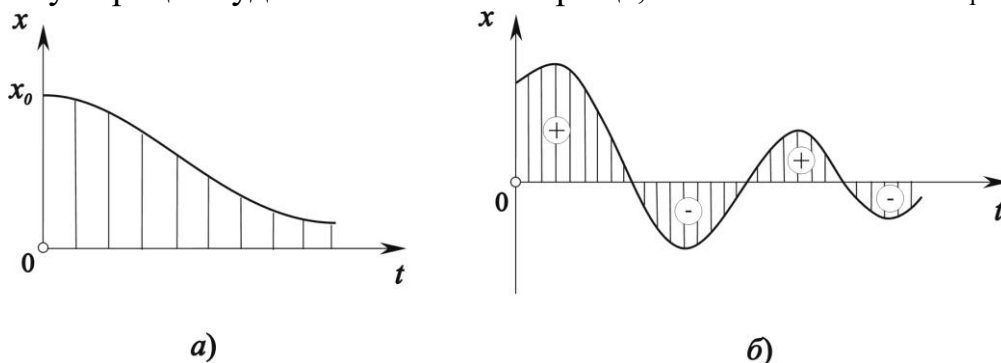


Рис. 9.4.

Однак така оцінка не підходить для коливального процесу, тому що нижні площі при обчисленні інтеграла будуть відніматися від верхніх. Тому за мінімумом величини I_1 найкращим виявився б процес з незагасаючими коливаннями, що неприпустимо.

У зв'язку з цим у загальному випадку приймають *квадратичну* інтегральну оцінку якості у вигляді

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt .$$

У літературі є формули, що виражають величину I_2 безпосередньо через коефіцієнти диференціального рівняння замкненої системи.

Очевидно, що прагнення оцінки I_2 до нуля наближає криву процесу до стрибка, тому що саме при цьому зменшується квадратична площа, обмежена кривою. Однак це, у свою чергу, викликає значне збільшення швидкості (ривок швидкості) у початковій частині процесу. Щоб одержати швидкозагасаючий, але досить плавний процес вводять *поліпшену квадратичну* інтегральну оцінку якості

$$I_k = \int_0^{\infty} (x^2 + T^2 \dot{x}^2) dt ,$$

де T вибирається відповідно до завдання бажаних властивостей перехідного процесу.

Покажемо, що при прагненні зменшити величину цієї оцінки крива перехідного процесу наближається до експоненти з бажаною сталою часу T . Для цього зробимо наступні перетворення:

$$I_k = \int_0^{\infty} (x^2 + T^2 \dot{x}^2) dt = \int_0^{\infty} (x + Tx)^2 dt - \int_0^{\infty} 2Tx\dot{x} dt = \int_0^{\infty} (x + Tx)^2 dt + Tx_0^2 .$$

Найменше можливе значення I_k буде при $x + Tx = 0$.

Розв'язок цього диференціального рівняння $x = x_0 e^{-\frac{t}{T}}$ і буде тією експонентною, до якої наближається перехідний процес при прагненні зменшити значення інтегральної оцінки I_k (рис. 9.5).

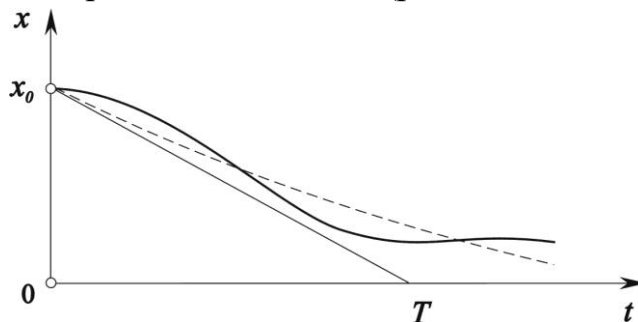


Рис. 9.5.

Застосовуються й інші види інтегральних оцінок якості

$$I = \int_0^{\infty} (x^2 + a^2 x^2 + b^2 x^2) dt ,$$

$$I = \int_0^{\infty} (a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \dots + a_n^2 x_n^2) dt ,$$

де $x_1 \dots x_n$, - змінні, що характеризують стан системи.

У загальному випадку

$$I = \int_0^{\infty} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i dt .$$

Як інтегральні критерії використовуються і функціонали більш загального вигляду. Інтегральні критерії застосовуються в теорії оптимальних систем автоматичного керування.

**Лекція 10. Види коригувальних пристроїв. Послідовні коригувальні пристрої.
Паралельні коригувальні пристрої. Коригувальні пристрої по зовнішньому впливу**

ВИДИ КОРЕГУВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ

Для того, щоб домогтися бажаної якості процесу керування або регулювання, тобто необхідної точності системи і якості перехідного процесу, є два шляхи. Перший полягає в тому, щоб досягти цього шляхом зміни параметрів даної системи, тому що зі зміною параметрів міняються відповідно коефіцієнти рівняння і частотні характеристики, а відповідно, і якість процесу.

Якщо ж шляхом зміни параметрів не вдається одержати бажаний результат, то треба йти другим шляхом — змінювати структуру системи, вводячи додаткові ланки — корегувальні пристрої.

Основна задача коригувальних пристроїв полягає в поліпшенні точності системи і якості перехідних процесів. Шляхом введення корегувальних пристроїв можна також вирішувати і більш загальну задачу — зробити систему стійкою, якщо вона була без них нестійкою, а потім домогтися і бажаної якості процесу регулювання.

Розрізняють чотири основних види корегувальних пристроїв.

1. Послідовні корегувальні пристрої $W_k(p)$, коли загальна передаточна функція розімкненого кола системи буде (рис. 10.1, а)

$$W(p) = W_k(p)W_0(p) ,$$

причому в другому варіанті (рис.87, б) маємо

$$W_k(p) = W_{01}(p)W_{k1}(p) ,$$

де нулями відзначені передаточні функції заданих частин системи.

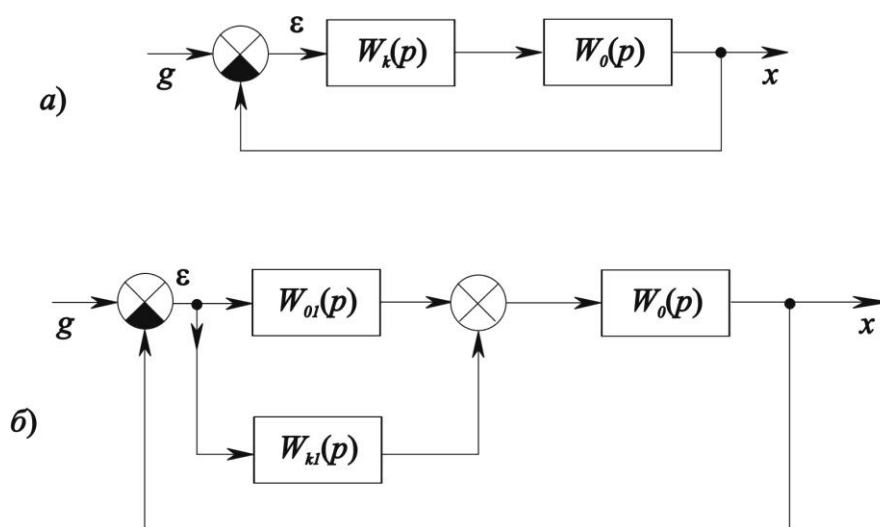


Рис. 10.1.

2. Паралельні корегувальні пристрої (додаткові місцеві зворотні зв'язки) $W_{зе}(p)$, коли

$$W(p) = \frac{W_{01}(p)W_0(p)}{1 + W_{зе}(p)W_{01}(p)}.$$

3. Корегувальні пристрої по зовнішньому впливу.
4. Неодиначний головний зворотний зв'язок (рис. 10.2).

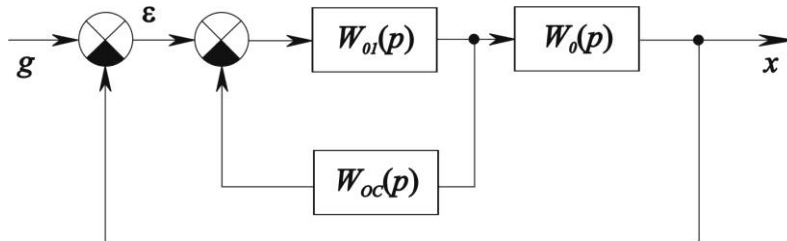


Рис. 10.2.

Передаюча функція корегувального пристрою $W_k(p)$ чи $W_{зе}(p)$ може мати довільний вигляд. Але найбільш часто застосовуються визначені типи корегувальних пристроїв, які ми і розглянемо.

ПОСЛІДОВНІ КОРЕГУВАЛЬНІ ПРИСТРОЇ

Введення похідної від помилки — найпростіший метод поліпшення якості перехідного процесу. Структурно введення похідної зображене на рис. 10.3.

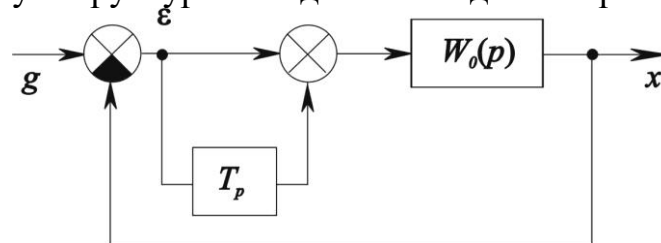


Рис. 10.3.

Технічно це може бути здійснено різними пристроями, причому похідна може бути реалізована не в чистому вигляді, а з інерційністю, наприклад, у

вигляді $\frac{T_p}{T_1 p + 1}$.

Передаюча функція розімкненого кола буде

$$W(p) = (T_p + 1)W_0(p).$$

Замінивши $p = j\omega$, одержимо амплітуду і фазу у вигляді

$$W(\omega) = W_0(\omega)\sqrt{T^2\omega^2 + 1}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \arctg T\omega.$$

Істотним тут є те, що при введенні впливу по похідній як би додається позитивна фаза. Внаслідок цього радіуси-вектори амплітудно-фазової

характеристики (рис. 10.4, а) повертаються проти годинникової стрілки, збільшуючи запас стійкості і якість перехідного процесу. Те ж саме легко простежити і на логарифмічних характеристиках (рис. 10.4, б).

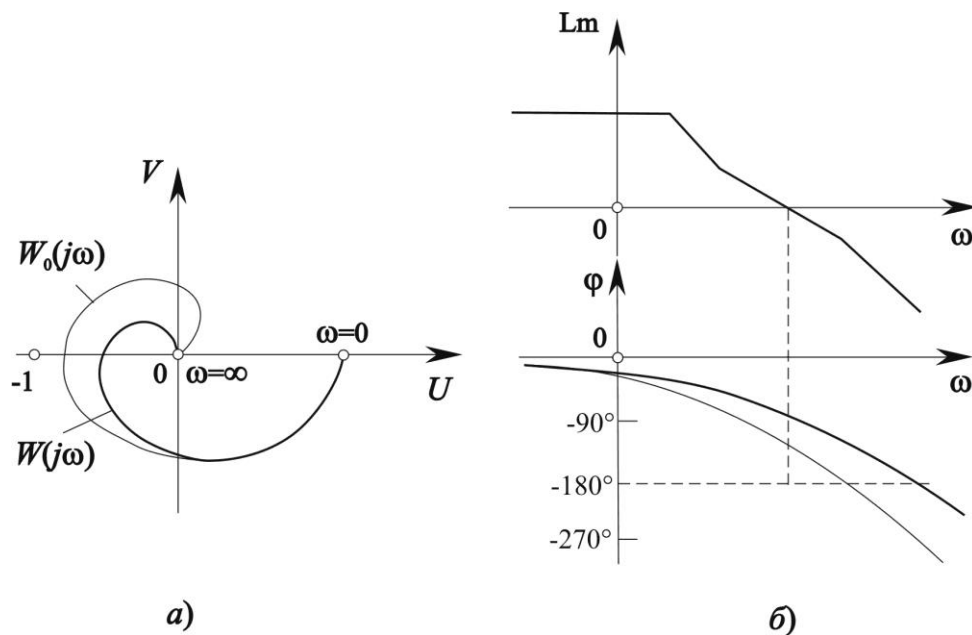


Рис. 10.4.

У випадку неідеального диференціювання (з інерційністю) цей ефект декілька зменшується кількісно, але якісно він зберігається.

Помітимо, що введення похідної від помилки може служити і стабілізуючим засобом: перетворює нестійку замкнену систему в стійку. Наприклад, якщо на рис. а точка $(-1, j0)$ лежала б усередині характеристики $W_0(j\omega)$, то нова характеристика $W(j\omega)$ уже може не охоплювати точку $(-1, j0)$.

Збільшення загального коефіцієнта підсилення K розімкненого кола є методом підвищення точності системи. При цьому зменшуються усі види сталих помилок системи. Збільшення K здійснюється послідовним введенням підсилювальної ланки в загальне коло. Але збільшення K призводить, як відомо, до погіршення умови стійкості, а значить і якості перехідного процесу. Тому часто приходится це робити одночасно з введенням похідної.

Введення інтеграла від помилки є методом створення чи підвищення порядку астатизму системи, а виходить, і збільшення її точності (рис. 10.5).

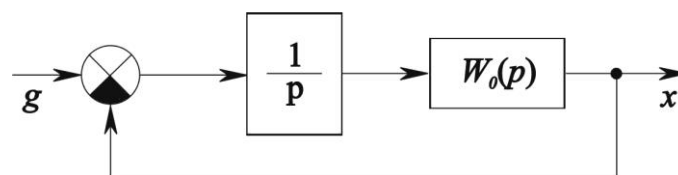


Рис. 10.5.

Передаточна функція буде

$$W(p) = \frac{1}{p} W_0(p) .$$

Підставивши $p = j\omega$, одержимо

$$W(\omega) = \frac{W_0(\omega)}{\omega} , \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) - 90^\circ .$$

Внаслідок повороту фази на -90° погіршуються умови стійкості і якість перехідного процесу. Іноді це може призвести і до нестійкості замкненої системи, якщо на рис. 10.6, а точка $(-1, j0)$ виявиться усередині характеристики $W(j\omega)$, хоча $W_0(j\omega)$ не охоплює цю точку.

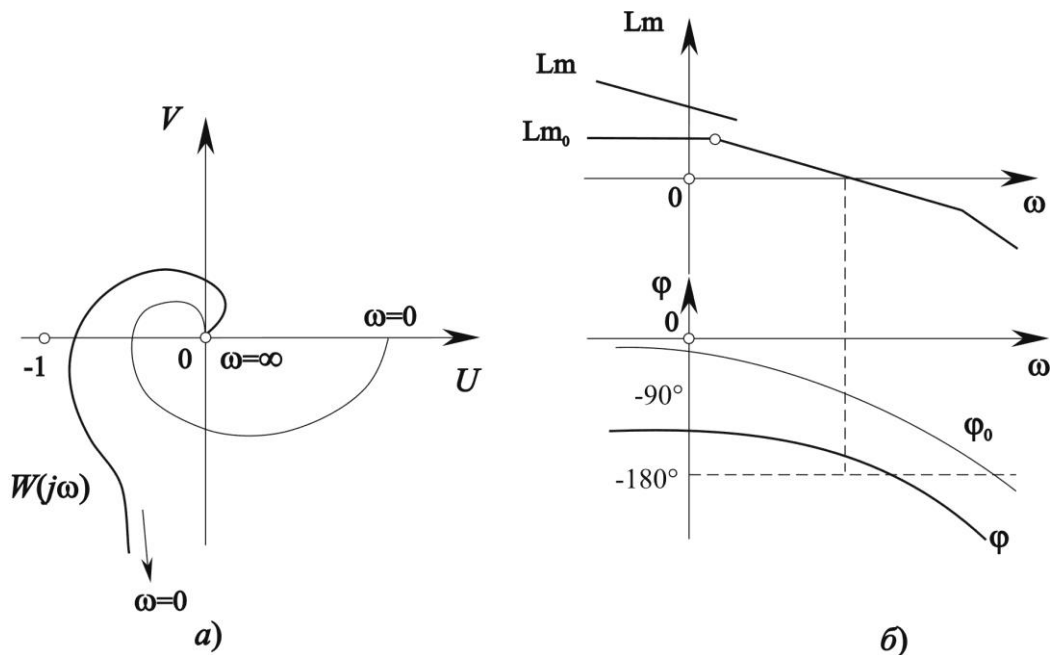


Рис. 10.6.

У випадку введення подвійного інтеграла в систему з передаточною

функцією вигляду $W_0(p) = \frac{K}{\tilde{A}(p)}$ (без похідної в чисельнику) одержуємо

$$W(p) = \frac{K}{p^2 A(p)} .$$

Характеристичне рівняння замкненої системи

$$p^2 \tilde{A}(p) + K = 0 .$$

Така система буде *структурно нестійкою* (нестійкою при будь-яких значеннях параметрів), тому що в характеристичному рівнянні відсутній член з першим степенем p . Тому астатизм другого порядку можливий тільки за умови

введення «похідних», тобто наявності багаточлена в чисельнику передаточної функції.

Ізодромний корегувальний пристрій має передаточну функцію вигляду

$$W_k(p) = \frac{T_p + 1}{T_p},$$

поєднуючи в собі введення інтегралу та похідної (рис. 10.7). Він дозволяє уникнути недоліків попереднього й одержувати необхідний порядок астатизму системи, зберігаючи її стійкість і якість.

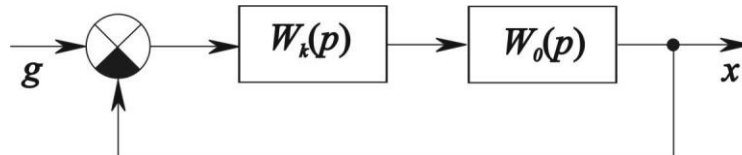


Рис. 10.7.

Частотні логарифмічні характеристики ізодромного пристрою мають вигляд, показаний на рис. 10.8.

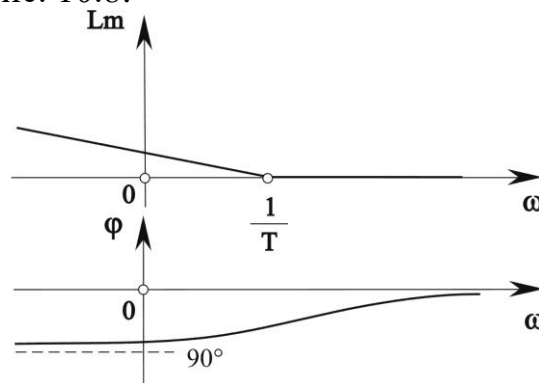


Рис. 10.8.

З них видно, що цей пристрій змінює лише низькочастотну частину амплітудної характеристики, що впливає на точність системи (підвищує її), а негативний зсув фази в частині, яка істотна для умов стійкості, невеликий.

Оскільки можна записати

$$W_k(p) = \frac{T_p + 1}{T_p} = 1 + \frac{1}{T_p},$$

то структурно ізодромний пристрій можна представити, як зображено на рис. 10.9.

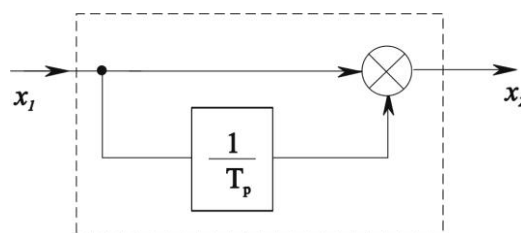


Рис. 10.9.

Отже, якщо у випадку простого введення інтеграла регулювання в системі виробляється не по величині помилки ε , а тільки по інтегралу від неї, то при ізодромному пристрою ми одержуємо регулювання по помилці і по інтегралу.

Можливі і більш складні передаточні функції послідовних корегувальних пристроїв.

ПАРАЛЕЛЬНІ КОРЕГУВАЛЬНІ ПРИСТРОЇ

Розглянемо паралельні корегувальні пристрої у вигляді зворотних зв'язків (рис. 10.10).

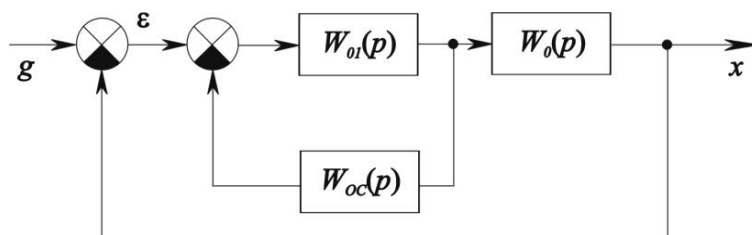


Рис. 10.10.

Основні види корегувальних зворотних зв'язків наступні:

а) жорсткий зворотний зв'язок.

$$W_{зб} = k_{зб} ;$$

б) інерційний жорсткий зворотний зв'язок

$$W_{зб}(p) = \frac{k_{зб}}{T_{зб}p + 1} ;$$

в) гнучкий зворотний зв'язок

$$W_{зб}(p) = k_{зб}p ;$$

г) інерційний гнучкий зворотний зв'язок

$$W_{зб}(p) = \frac{k_{зб}p}{T_{зб}p + 1} .$$

Можливі і більш складні передаточні функції корегувальних зворотних зв'язків (рис. 10.11).

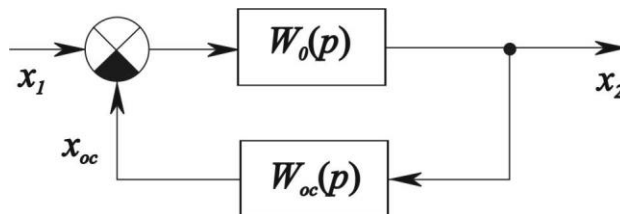


Рис. 10.11.

Проілюструємо на прикладах основні властивості цих зворотних зв'язків при охопленні ними різних типів ланок.

Позитивний жорсткий зворотний зв'язок. Нехай він охоплює аперіодичну

ланку, тобто $W_0(p) = \frac{k}{Tp + 1}$, $W_{36} = k_{36}$.

Тоді загальна передаточна функція буде

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 - W_{36}(p)W_0(p)} = \frac{k}{Tp + 1 - kk_{36}}$$

або $W(p) = \frac{k_1}{T_1p + 1}$, де $k_1 = \frac{k}{1 - kk_{36}}$, $T_1 = \frac{T}{1 - kk_{36}}$.

Отже, позитивний зворотний зв'язок може служити для збільшення коефіцієнта підсилення. Але треба мати на увазі, що одночасно з цим збільшується і стала часу, тобто інерційність ланки, а при $k_{36} > 1/k$ ланка стає нестійкою.

Негативний жорсткий зворотний зв'язок. При охопленні ним аперіодичної ланки одержуємо

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_{36}(p)W_0(p)} = \frac{k}{Tp + 1 + kk_{36}} = \frac{k_1}{T_1p + 1},$$

де $k_1 = \frac{k}{1 + kk_{36}}$, $T_1 = \frac{T}{1 + kk_{36}}$.

Отже, негативний жорсткий зворотний зв'язок зменшує інерційність ланки. Тим самим він поліпшує якість перехідного процесу в системі і може робити стабілізуючу дію, тобто перетворювати нестійку замкнену систему в стійку (подібно введенню похідної). Зменшення ж коефіцієнта підсилення k_1 при цьому може бути скомпенсоване за рахунок інших ланок системи.

При охопленні інтегруючої ланки негативним жорстким зворотним зв'язком, тобто

$$W_0(p) = \frac{k}{p}, \quad W_{36} = k_{36},$$

одержуємо

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_{36}W_0(p)} = \frac{k}{p + k_{36}k} = \frac{k_1}{T_1p + 1},$$

де $k_1 = \frac{1}{k_{36}}$, $T_1 = \frac{1}{kk_{36}}$.

Видно, що під дією жорсткого зворотного зв'язку губиться інтегруюча властивість ланки, і вона перетворюється в аперіодичну з коефіцієнтом

підсилення, який цілком визначається тільки зворотним зв'язком. Стала часу T_1 буде мала при великому коефіцієнті підсилення ланки k .

Далі без спеціальних застережень будемо розглядати тільки негативні зворотні зв'язки.

Інерційний жорсткий зворотний зв'язок. При охопленні ним інтегруючої ланки

$$W_0(p) = \frac{k}{p}, \quad W_{36}(p) = \frac{k_{36}}{T_{36}p + 1},$$

приходимо до наступного виразу:

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_{36}(p)W_0(p)} = \frac{k(T_{36}p + 1)}{T_{36}p^2 + p + kk_{36}} = \frac{k_1(T_{36}p + 1)}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1},$$

$$\text{де } k_1 = \frac{1}{k_{36}}, \quad T_1^2 = \frac{T_{36}}{kk_{36}}, \quad T_2 = \frac{1}{kk_{36}}.$$

Отже, у даному випадку інтегруюча ланка перетворюється в ланку другого порядку з введенням похідної. При цьому коефіцієнт підсилення k_1 і інтенсивність введення похідної T_{36} цілком визначаються зворотним зв'язком, а первинний коефіцієнт підсилення ланки впливає лише на нові сталі часу T_1 і T_2 , які будуть тим менше, чим більше k . Тому при великому k охоплення інтегруючої ланки інерційним жорстким зворотним зв'язком еквівалентно підсилювальній ланці з введенням похідної. Звідси впливає і добрий вплив її на якість перехідного процесу в системі в цілому.

Гнучкий зворотний зв'язок. При охопленні ним коливальної ланки маємо

$$W_0(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1}, \quad W_{36}(p) = k_{36}p.$$

Звідси

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_{36}(p)W_0(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\zeta_1 Tp + 1},$$

$$\text{де } 2\zeta_1 T p = 2\zeta T p + k k_{36}, \quad \zeta_1 = \zeta + \frac{k k_{36}}{2T}.$$

Як видно, у цьому випадку збільшується демпфірування коливальної ланки (тому що $\zeta_1 > \zeta$), причому не змінюється коефіцієнт підсилення. Процес стає менш коливальним і може перетворитися в аперіодичний (якщо $\zeta_1 \geq 1$).

Помітимо, що якщо є *аперіодична ланка*, то охоплювати її окремо гнучким зворотним зв'язком немає сенсу, тому що це тільки збільшить її інерційність (сталу часу).

При охопленні інерційної інтегруючої ланки гнучким зворотним зв'язком, тобто при

$$W_0(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}, \quad W_{36}(p) = k_{36}p,$$

маємо

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_{36}(p)W_0(p)} = \frac{k}{p(Tp + 1 + kk_{36})} = \frac{k_1}{p(T_1p + 1)},$$

де $T_1 = \frac{T}{1 + kk_{36}}, \quad k_1 = \frac{k}{1 + kk_{36}}$. Таким чином зберігається той же тип інтегруючої ланки, але зі зменшеною інерційністю.

Інерційний гнучкий зворотний зв'язок. При охопленні ним інерційної інтегруючої ланки, тобто при

$$W_0(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}, \quad W_{36}(p) = \frac{k_{36}p}{T_{36}p + 1},$$

маємо

$$W(p) = \frac{k(T_{36}p + 1)}{p[TT_{36}p^2 + (T + T_{36})p + 1 + kk_{36}]} = \frac{k_1(T_{36}p + 1)}{p(T_2^2 p^2 + T_1p + 1)},$$

де $k_1 = \frac{k}{1 + kk_{36}}, \quad T_2^2 = \frac{TT_{36}}{1 + kk_{36}}, \quad T_1 = \frac{T + T_{36}}{1 + kk_{36}}$.

Тут при збереженні інтегруючої властивості ланки виходить ефект введення похідної, тобто *інтегруюча ланка стає ізодромною*, а нові сталі часу T_1 і T_2 , що характеризують інерційність ланки, можуть бути зроблені малими за рахунок великого первинного коефіцієнта підсилення k . В останньому випадку маємо $k_1 \approx 1/k_{36}$. Можна помітити взагалі, що інерційне запізнювання в зворотному зв'язку (на відміну від такого в прямому колі) доцільно використовувати для поліпшення якості перехідних процесів, одержуючи ефект аналогічний введенню похідної в прямому ланцюзі.

Можуть застосовуватися й інші типи корегувальних зворотних зв'язків з більш складними передаточними функціями. Розглянемо, як забезпечити умову збереження порядку астатизму охоплюваної ланки.

Нехай ланка

$$W_0(p) = \frac{k_0}{p^v W_0'(p)},$$

охоплюється гнучким зворотним зв'язком

$$W_{зв}(p) = k_{зв} p^{\mu} W_{зв}'(p) .$$

Тоді

$$W(p) = \frac{k_0 W_0'(p)}{p^{\nu} + p^{\mu} k_0 k_{зв} W_0'(p) W_{зв}'(p)} .$$

Очевидно, що для збереження ν -го порядку астатизму необхідно мати в зворотному зв'язку $\mu \geq \nu$. Якщо ж це неможливо технічно і виходить $\mu < \nu$, то втрачену частину порядку астатизму можна компенсувати додаванням послідовних корегувальних пристроїв, наприклад, ізодромного типу.

КОРЕГУВАЛЬНІ ПРИСТРОЇ ПО ЗОВНІШНЬОМУ ВПЛИВІ. ІНВАРІАНТНІСТЬ

Основний принцип автоматичного керування і регулювання полягає у формуванні керуючого сигналу по величині помилки ε (з використанням інтегралів і похідних від ε). Якщо ж вводиться корегувальний пристрій по зовнішньому впливу, то виходить **комбіноване регулювання** — по помилці і зовнішньому впливі (теж з використанням відповідних інтегралів і похідних).

Шляхом введення корекції по зовнішньому впливу вдається за певних умов зводити величину сталої помилки до нуля при будь-якій формі зовнішнього впливу. Ця властивість називається **інваріантністю системи** стосовно зовнішнього впливу.

Зовнішні впливи, як уже відзначалося, поділяються на: задавальні, сигнал яких система повинна відтворювати, і збурюючий, дію яких потрібно нейтралізувати.

Корегувальні пристрої по впливі, що задається (рис. 10.12). Тут поряд із сигналом помилки вводиться у внутрішнє коло системи ще й сигнал задавального впливу g через деяку передаточну функцію $W_k(p)$.

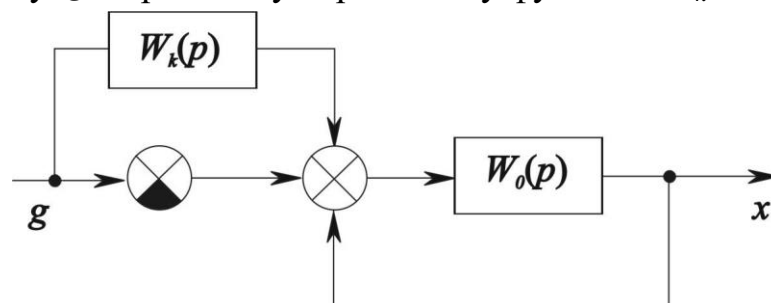


Рис. 10.12.

Тоді вихідна величина (у зображенні по Лапласові) буде мати вигляд

$$X(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)} [1 + W_k(p)] G(p) ,$$

тобто еквівалентна передаточна функція замкненої системи для регульованої величини буде дорівнювати

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)} [1 + W_k(p)]$$

а для помилки:

$$W_\varepsilon(p) = 1 - W(p) = \frac{1 - W_k(p)W_0(p)}{1 + W_0(p)}$$

Стала помилка буде дорівнювати нулю при будь-якій формі задавального впливу у тому випадку, якщо $W_k(p) = 1/W_0(p)$.

Звичайно цій умові інваріантості задовольнити цілком не можливо, але можна підібрати наближену рівність для визначеної області частот (практично пропускаємих системою). Така неповна інваріантність системи дуже істотно зменшує помилку ε системи регулювання (інваріантність САК буде розглядатися пізніше).

Можливі й інші варіанти корекції по задавальному впливу.

Корегувальний пристрій по збуренню. Нехай задана схема системи (рис. 10.13, а). Введемо корегувальний пристрій входом якого є збурюючий вплив (рис. 10.13, б).

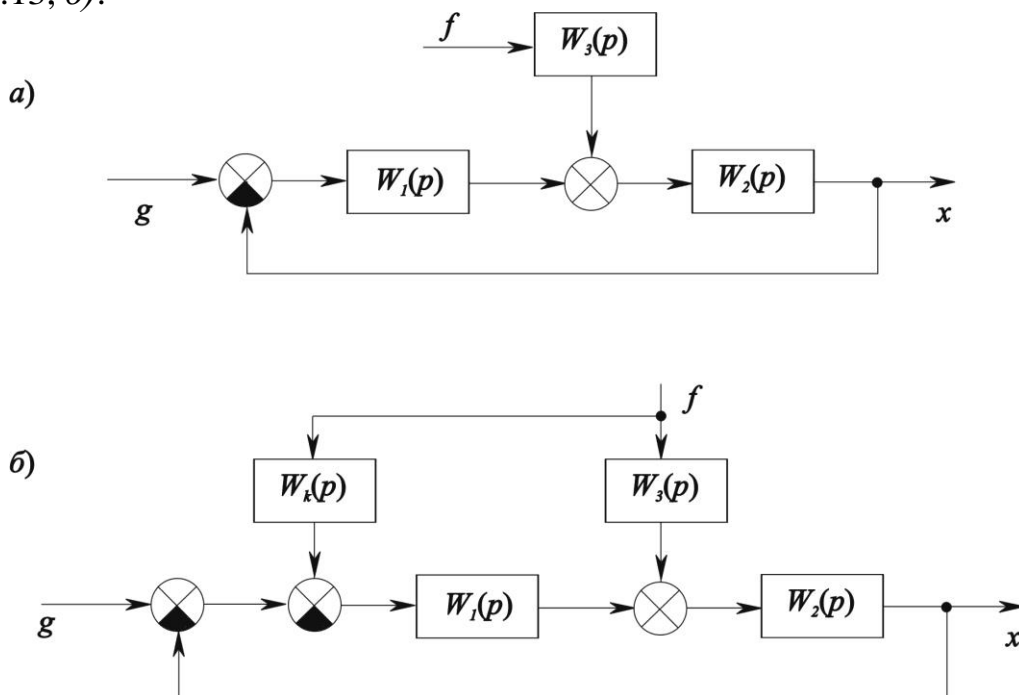


Рис. 10.13.

Тоді передаточна функція замкненої системи для регульованої величини x по збурюючому впливу дорівнює

$$W_f(p) = \frac{X}{F} = \frac{W_2(p)[W_3(p) - W_k(p)W_1(p)]}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

Оскільки вплив f треба придушити, то умова повної інваріантості приймає вигляд

$$W_k(p) = \frac{W_3(p)}{W_1(p)} .$$

Тут також можна обмежитись неповною інваріантістю, якщо точне задоволення умовам викликає технічні труднощі. Особлива трудність полягає в тому, що збурюючі впливи f , на відміну від задавальних впливів g , не завжди можна подати на вхід $W_k(p)$. Дійсно, для цього потрібно уміти вимірювати f , що не завжди можливо. Існують непрямі методи виміру f , що широко використовуються на практиці.

Введення корегувальних пристроїв по зовнішніх впливах (рис. 10.14) є важливим *методом підвищення точності* систем автоматичного регулювання і керування. Цей метод має таку позитивну особливість. Як видно з написаних вище передаточних функцій, характеристичне рівняння замкненої системи при введенні такої корекції залишається незмінним.

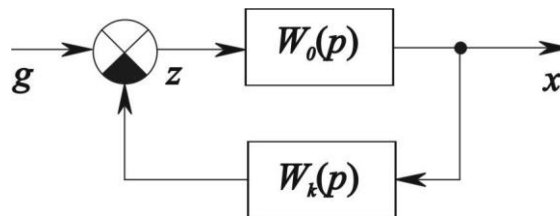


Рис. 10.14.

Отже, цей спосіб корекції, істотно підвищуючи точність системи, майже не впливає на якість перехідного процесу, у той час як усі попередні методи підвищення точності завжди були зв'язані з погіршенням якості перехідного процесу, якщо не приймалися додаткові заходи.

На закінчення зупинимося ще на використанні *неодиничного головного зворотного зв'язку*, що також можна застосовувати як корегувальний засіб. Введемо в головний зворотний зв'язок, який звичайно дорівнює одиниці, пристрій з передаточною функцією $W_k(p)$. У цьому випадку на вході системи задавальний вплив g , порівнюється не безпосередньо з вихідною величиною x , як звичайно, а з деякою величиною z , причому

$$Z(p) = W_k(p)X(p) .$$

Тоді одержуємо

$$X(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_k(p)W_0(p)} G(p) .$$

Для повної інваріантності системи потрібно $X=G$, тобто

$$W_k(p) = 1 - \frac{1}{W_0(p)} .$$

З цього виразу видно, наскільки передаточна функція головного зворотного зв'язку повинна відрізнятися від «звичайної» одиниці, щоби система стала інваріантною, тобто відтворювала без сталої помилки будь-який задавальний вплив. Цю умову можна виконувати приблизно. Однак при такому способі, як видно з передаточної функції замкненої системи, істотно міняється її характеристичне рівняння. Тому одночасно потрібно стежити, щоб виходила бажана якість перехідного процесу. Зазначимо, що в рівноважному стані ($p=0$) маємо

$$k_k = 1 - \frac{1}{k_0} . \quad (10.1)$$

Отже, якщо ввести в головний зворотний зв'язок системи коефіцієнт підсилення k_k відповідно до формули (10.1) то статична система перетвориться в астатичну ($X = G$) без введення інтегруючої ланки.

Лекція 11. Частотний метод синтезу коригувальних пристроїв. Синтез послідовного коригувального пристрою, Синтез паралельного коригувального пристрою

ЧАСТОНИЙ МЕТОД СИНТЕЗУ КОРЕГУВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ

Найбільш розповсюджений частотний метод синтезу корегувальних пристроїв за допомогою логарифмічних частотних характеристик. Він проводиться таким чином. Будується бажана логарифмічна амплітудна частотна характеристика (рис. 11.1), виходячи з необхідної точності системи і необхідної якості перехідного процесу. Ця бажана характеристика порівнюється з характеристикою даної системи без корекції. Визначається передаточна функція корегувального пристрою так, щоб при його включенні в систему, остання мала бажану форму логарифмічної амплітудної характеристики. Потім будується фазова частотна характеристика й оцінюється величина запасу стійкості системи й інших якісних показників.

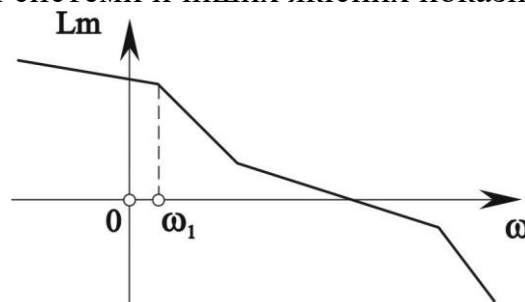


Рис. 11.1.

Розглянемо формування бажаної логарифмічної амплітудної частотної характеристики, виходячи з заданих вимог до системи по точності і якості перехідного процесу.

Вимоги точності системи. Вони формулюються по різному.

1. Нехай задані: «робочі» частота ω_p й амплітуда a_p , тобто основні значення частоти й амплітуди впливу, що задається g , що мають місце при роботі даної системи; задана також припустима помилка $A_\varepsilon = \varepsilon_{\text{дон}}$ (амплітуда помилки).

Робочі частоти системи керування лежать звичайно нижче (лівіше) першої спряженої частоти ω_1 .

Для області низьких частот, де $|W(j\omega_p)| \gg 1$, можна записати

$$|W_\varepsilon(j\omega_p)| = \frac{1}{|1 + W(j\omega_p)|} \approx \frac{1}{|W(j\omega_p)|}.$$

При цьому амплітуда помилки

$$A_{\varepsilon} \approx \frac{a_p}{|W(j\omega_p)|}.$$

Звідси бажане значення

$$|W(j\omega_p)| \geq \frac{a_p}{\varepsilon_{\text{дон}}}.$$

2. Нехай дані максимальні швидкість g'_{max} , прискорення g''_{max} і $\varepsilon_{\text{дон}}$.

Для використання частотних характеристик припускаємо

$$g(t) = a_p \sin \omega_p t,$$

де індексом « p » позначені «робочі» амплітуда і частота, при яких будуть мати місце задані швидкість g'_{max} і прискорення g''_{max} .

$$g' = a\omega \cos \omega t; \quad g'' = -a\omega^2 \sin \omega t.$$

Отже

$$g'_{\text{max}} = a\omega; \quad g''_{\text{max}} = a\omega^2.$$

Тоді, можна записати

$$\omega_p = \frac{g''_{\text{max}}}{g'_{\text{max}}}, \quad a_p = \frac{g'^2_{\text{max}}}{g''_{\text{max}}}. \quad \text{і бажане значення } |W(j\omega_p)| \geq \frac{a_p}{\varepsilon_{\text{дон}}}.$$

3. Нехай дано $g = \dot{g}_0 t$ (для астатичної системи). Маємо вирази

$$W(p) = \frac{KB(p)}{pA(p)}, \quad W_{\varepsilon}(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{pA(p)}{pA(p) + KB(p)}.$$

Коефіцієнти помилок

$$c_0 = W_{\varepsilon}(0) = 0, \quad c_1 = \left. \frac{dW_{\varepsilon}}{dp} \right|_{p=0} = \frac{1}{K}.$$

Стала помилка зображується у вигляді

$$\varepsilon_{yc}(t) = c_0 g(t) + c_1 \dot{g}(t) = \frac{\dot{g}_0}{K}.$$

Звідси знаходимо бажане значення

$$K \geq \frac{\dot{g}_0}{\varepsilon_{\text{дон}}}.$$

По цим даними, що відображають вимоги точності системи, будуємо низькочастотну частину бажаної логарифмічної амплітудної частотної характеристики, як показано на рис. 11.2. Початковий нахил — 20 дб/дек (астатизм першого порядку). Точка зламу та подальший нахил поки ще не визначені.

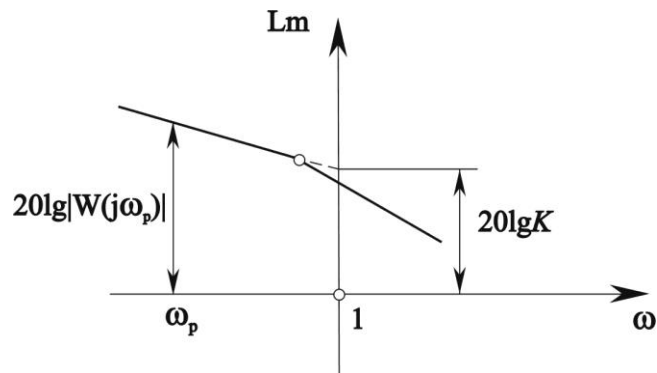


Рис. 11.2.

Вимоги якості перехідного процесу. Нехай задані: припустимо перерегулювання σ і час загасання перехідного процесу t_n . Скористаємося графіком рис. 11.3.

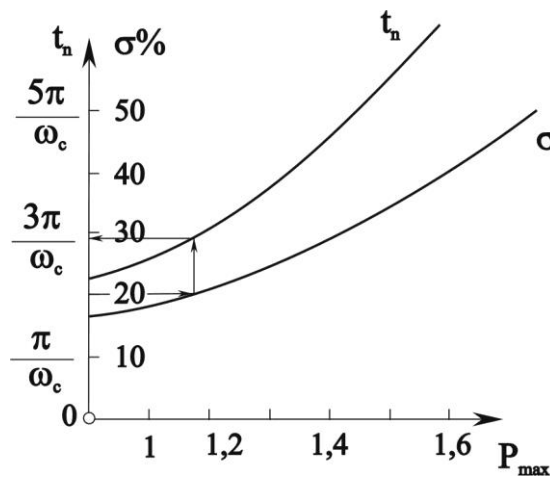


Рис. 11.3.

По цьому графіку, відклавши задану величину σ (наприклад, 20%), визначаємо величину t_n , наприклад $t_n = \frac{2,8\pi}{\omega_c}$. Але оскільки t_n нам задано, то можна обчислити частоту зрізу $\omega_z = \frac{2,8\pi}{t_n}$. Наносимо знайдене значення ω_z на графік шуканої бажаної ЛАХ і проводимо через точку ω_z пряму з нахилом — 20 дб/дек. Це рекомендується для забезпечення гарної якості перехідного процесу (рис. 11.4).

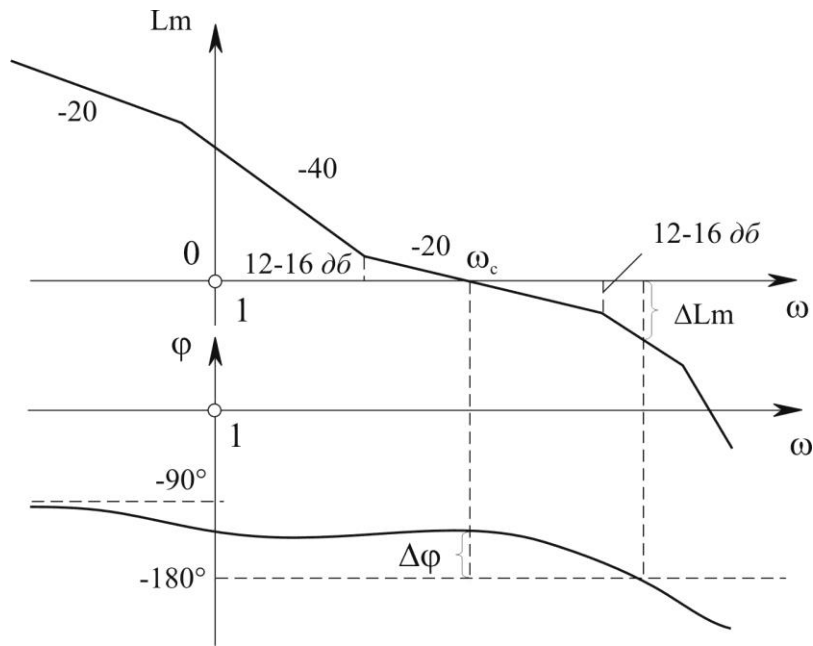


Рис. 11.4.

Потім з попереднього розрахунку беремо низькочастотну частину характеристики і спрягаємо її похилою прямою з нахилом — 40 чи — 60 дб/дек , як зручніше. Високочастотна частина помітної ролі не грає. Тому її беремо такою, яка є в даній системі. Перевіряємо наявність необхідного запасу стійкості за амплітудою ΔLm та за фазою $\Delta\varphi$.

СИНТЕЗ ПОСЛІДОВНОГО КОРЕГУВАЛЬНОГО ПРИСТРОЮ

Задано передаточну функцію розімкненого кола системи без корекції $W_0(p)$ (рис. 11.5). Частотна характеристика відрізняється від бажаної. Введемо послідовний корегувальний пристрій із шуканою передаточною функцією $k_{\pi}\Pi(p)$.

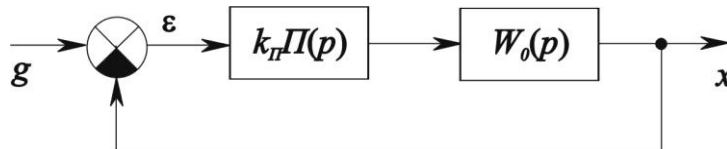


Рис. 11.5.

Відповідно до описаної вище методики, будемо бажану логарифмічну амплітудну частотну характеристику (рис. 11.6). Нехай коефіцієнт підсилення бажаної системи K_{δ} , відрізняється від наявного K_0 . Тоді потрібно підняти характеристику $W_0(j\omega)$ так, щоб на ній вийшов бажаний коефіцієнт підсилення. Одержуємо нову характеристику $W_0' = \frac{K_{\delta}}{K_0} W_0$.

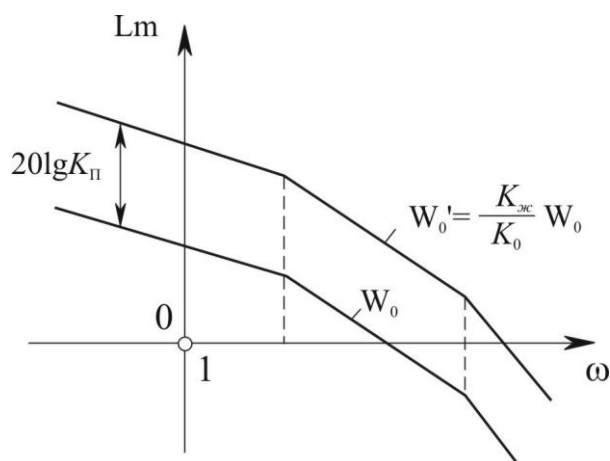


Рис. 11.6.

Відстань між W_0' і W_0 по вертикалі і дасть нам шукану величину $20\lg k_{\Pi}$, тобто шуканий коефіцієнт підсилення корегувального пристрою

$$k_{\Pi} = \frac{K_{\delta}}{K_0}.$$

Тепер треба знайти його передаточну функцію $\Pi(p)$. Для цього суміщаємо на одному графіку логарифмічні амплітудні частотні характеристики для W_{δ} і W_0' . Вони відрізняються на ділянці від точки $\frac{1}{T_1}$ до точки $\frac{1}{T_4}$ (рис. 11.7).

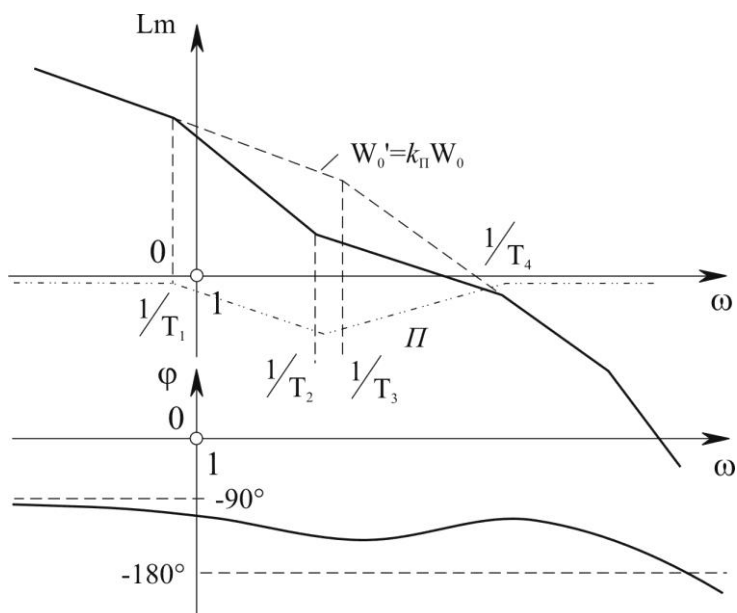


Рис. 11.7.

Оскільки $W(p) = k_{II} \Pi(p) W_0(p) = W_{\delta}(p)$, то можна записати (після підстановки $p = j\omega$) наступне:

$$\Pi(j\omega) = \frac{W_{\delta}(j\omega)}{k_{II} W_0(j\omega)} , \quad \text{або} \quad \Pi(j\omega) = \frac{W_{\delta}(j\omega)}{W_0'(j\omega)} ,$$

звідки $20\lg|\Pi(j\omega)| = 20\lg|W_{\delta}(j\omega)| - 20\lg|W_0'(j\omega)|$.

Отже, щоб знайти характеристику $Lm(\omega)$ для $\Pi(p)$, потрібно відняти характеристику $Lm(\omega)$ для W_0' від W_{δ} . Результат віднімання показаний штрих пунктирною лінією на рис. Звідси очевидна шукана передаточна функція послідовного корегувального пристрою

$$\Pi(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)} .$$

На закінчення потрібно побудувати фазову характеристику $\varphi(\omega)$ для W_{δ} й оцінити запаси стійкості.

По знайденій передаточній функції можна скласти електричну схему корегувального пристрою. У довідниках є такі схеми для різних передаточних функцій.

СИНТЕЗ ПАРАЛЕЛЬНОГО КОРЕГУВАЛЬНОГО ПРИСТРОЮ

Задано передаточну функцію розімкненого кола $W_0(p)$. Потрібно ввести корегувальний зворотний зв'язок так, щоб система в цілому володіла бажаною частотною характеристикою. Структурна схема кола зображена на рис. 11.8.

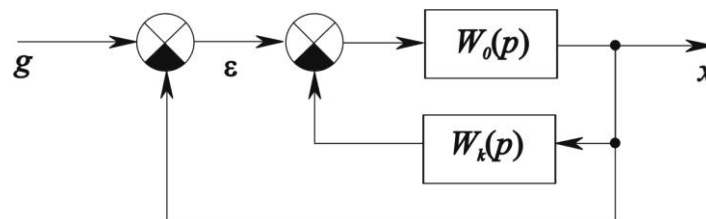


Рис. 11.8.

Передаточна функція розімкненого кола з корекцією дорівнює

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_k(p)W_0(p)} = W_{\delta}(p)$$

Отже, $20\lg|W_{\delta}(j\omega)| = 20\lg|W_0(j\omega)| - 20\lg|1 + W_k(j\omega)W_0(j\omega)|$.

Щоб позбутися від суми під знаком логарифма, запишемо приблизно

$$20\lg|W_{\delta}(j\omega)| \approx \begin{cases} 20\lg|W_0(j\omega)| & \text{при } |W_k(j\omega)W_0(j\omega)| \ll 1, \\ 20\lg\left|\frac{1}{W_k(j\omega)}\right| & \text{при } |W_k(j\omega)W_0(j\omega)| \gg 1. \end{cases} \quad (11.1)$$

Побудуємо задану логарифмічну характеристику W_0 з бажаним коефіцієнтом підсилення і бажану характеристику W_{δ} (рис. 11.9, а).

Як шукану характеристику $1/W_k$ приймемо характеристику, позначену на рис. точковим пунктиром і співпадаючу в середній частині з W_{δ} . Віднімемо її від характеристики W_0 . Одержимо

$$20\lg|W_0(j\omega)| - 20\lg\left|\frac{1}{W_k(j\omega)}\right| = 20\lg|W_k(j\omega)W_0(j\omega)|.$$

Цей результат показаний на рис. 11.9, а штрих пунктирною лінією. З графіка видно, що на ділянці CD характеристика $|W_k W_0| > 1$, а до точки C і після точки D характеристика $|W_k W_0| < 1$.

Отже, при прийнятому обрисі шуканої характеристики $1/W_k$ задовольняються написані вище наближені рівності (11.1).

Таким чином, знайдений паралельний корегувальний пристрій у вигляді зворотного зв'язку, що створює для системи в цілому близьку до бажаного частотну характеристику.

Згідно рис. 11.9, а логарифмічна характеристика W_k набуває вигляду рис. 11.9, в, що відповідає наступній передаточній функції шуканого корегувального зворотного зв'язку:

$$W_k(p) = \frac{kp^2}{Tp + 1}.$$

Це інерційний гнучкий зворотний зв'язок з подвійним диференціюванням. На закінчення, через використання наближених рівностей, необхідно уточнити характеристику, що вийшла $W(j\omega) \approx W_{\text{жс}}(j\omega)$, а потім зобразити фазову характеристику $\varphi(\omega)$ (рис. 109, б) і оцінити запаси стійкості. Оскільки дана побудова вимагає дотримання «мінімальнофазності» системи, то треба перевірити також стійкість внутрішнього контуру системи з передаточною функцією.

$$W_{\text{вн}}(p) = W_k(p)W_0(p).$$

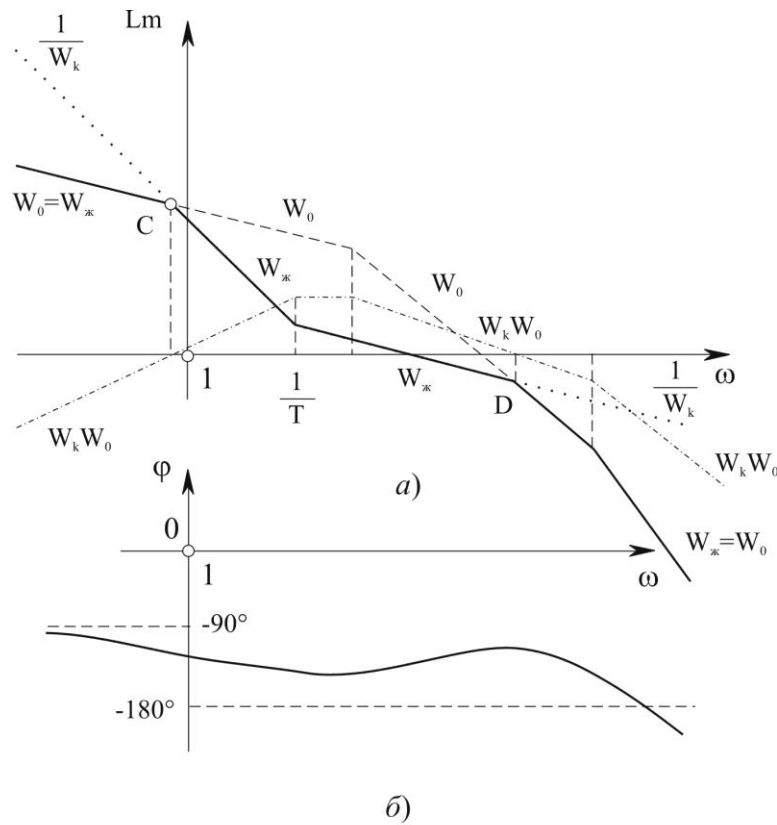


Рис. 11.9.

Амплітудна частотна характеристика для нього зображена на рис. 11.9, а. Потрібно лише побудувати фазову частотну характеристику $\varphi_{\text{вн}}(\omega)$ і переконатися в дотриманні частотного критерію стійкості.

Існує розвиток цього методу стосовно до синтезу корегувальних пристроїв, що вводяться спільно (послідовного і паралельного). Розроблені також і інші варіанти частотних методів синтезу.

Тема 1.4. Багатовимірні системи. Інваріантність багатовимірних систем

Лекція 12. Теорія інваріантності і комбіноване керування. Багатовимірні системи. Керованість, спостережуваність, стабілізованість. Інваріантність багатовимірних систем

ТЕОРІЯ ІНВАРІАНТОСТІ І КОМБІНОВАНЕ КЕРУВАННЯ

Одним із способів, що дозволяють одержати високу точність у системах автоматичного регулювання, є використання методів теорії інваріантності. Система автоматичного регулювання є інваріантною відносно до збурюючого впливу, якщо після завершення перехідного процесу регульована величина і помилка системи не залежить від цього впливу. Система автоматичного регулювання є інваріантною стосовно задавального впливу, якщо після завершення перехідного процесу помилка системи не залежить від цього впливу.

Нехай для помилки САР має місце рівняння

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) \varepsilon(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) \psi(p),$$

де $\psi(p)$ - збурення або задавальний вплив.

Розв'язок цього рівняння має дві складові – вільну $\varepsilon_{vil}(t)$ і усталену $\varepsilon_{ycm}(t)$. Зображення помилки $\varepsilon(t)$ при нульових початкових умовах можна записати у вигляді

$$\varepsilon(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \psi(p).$$

Введемо також зображення функції часу $\psi(t)$, що представляє собою дробово-раціональну функцію комплексної величини $p = c + j\omega$:

$$\psi(p) = \frac{Q(p)}{D(p)}.$$

Відповідно до теореми розкладання, оригінал у випадку відсутності кратних коренів може бути зображений у вигляді

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{vil}(t) + \varepsilon_{ycm}(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t} + \sum E_i e^{p_i t}, \quad (12.1)$$

де p_k – полюси передаточної функції, тобто корені рівняння $A(p) = 0$, а p_i – полюси вхідного впливу, тобто корені рівняння $D(p) = 0$.

Усталена складова $\varepsilon_{ycm}(t)$ буде тотожно дорівнювати нулю в наступних випадках:

1. Якщо $Q(p) = 0$, то $\varepsilon_{ycm}(t) \equiv 0$. Цей випадок є тривіальним, так як відповідає відсутності вхідного впливу, і він не представляє інтересу.

2. Якщо $B(p)=0$, то $\varepsilon_{уст}(t) \equiv 0$. Цей випадок відповідає абсолютній інваріантності системи стосовно вхідного впливу $\psi(t)$, який може бути будь-якою функцією часу, тобто змінюватися за довільним законом.

У слідкуючих системах при розгляді задавального впливу в якості $\psi(t)$ умова $B(p)=0$ означає, що дорівнює нулю передаточна функція по помилці: $W_{\varepsilon}(p)=0$. З цього випливає рівність одиниці передаточної функції замкненої системи: $W_g(p)=1-W_{\varepsilon}(p)=1$. Ця умова призводить до того, що слідкуюча система повинна мати нескінченну смугу пропускання, тому що частотна передаточна функція замкненої системи: $W_g(j\omega)=1$ при всіх частотах $0 < \omega < \infty$. У реальних системах реалізувати нескінченну смугу пропускання неможливо, тому абсолютної інваріантності по задавальному впливу принципово не може бути досягнуто.

При розгляді збурюючого впливу в якості $\psi(t)$ умова $B(p)=0$ означає рівність нулю передаточної функції по збурюючому впливу: $W_f(p)=0$. Тут в принципі можливе одержання абсолютної інваріантності по даному збуренню, однак у більшості випадків приходить мати справу зі значними технічними труднощами.

3. Рівність нулю усталеної складової буде спостерігатися для таких вхідних функцій, зображення яких мають усі полюси (всі корені рівняння $D(p)=0$), що збігаються з нулями передаточної функції (тобто з коренями рівняння $B(p)=0$). У цьому випадку після розкладання на множники поліномів $B(p)$ і $D(p)$ можна скоротити однакові співмножники вигляду $(p-p_i)$ в чисельнику і знаменнику зображення. У результаті другий доданок у виразі (1) обертається в нуль, а $\varepsilon_{уст}(i) \equiv 0$.

Цей випадок відповідає **частковій інваріантності**. Система буде інваріантна до вхідних впливів визначеного вигляду (наприклад до впливів, що можуть бути зображені у вигляді степеневих функцій часу з позитивними й обмеженими степенями, у вигляді суми експонент із заданими сталими часу і т.ін.)

Вводиться також поняття інваріантності системи стосовно якого-небудь вхідного впливу з точністю до Δ . Тут мається на увазі не тотожна рівність нулю усталеної складової помилки $\varepsilon_{уст}(t)$, а наближена рівність, мірою виконання якої є деяка величина Δ . Для оцінки виконання інваріантності до Δ існують різні критерії (практично збігаються з критеріями точності систем регулювання, які були розглянуті раніше).

Основним методом, що використовується при побудові інваріантних систем, є застосування комбінованого керування.

Комбіноване керування. Під комбінованим керуванням розуміється такий метод побудови замкнених автоматичних систем, коли, поряд з регулюванням по відхиленню (принцип зворотного зв'язку), використовується

регулювання по збурюючому впливу (принцип компенсації) чи задавальному впливу (принцип розімкненого керування). Таким чином, у системі комбінованого керування здійснюється регулювання по замкненому і розімкненому циклах.

Розглянемо спочатку випадок, коли додатково до регулювання по відхиленню $\varepsilon(t)$ використовується регулювання по задавальному впливу $g(t)$. Структурна схема такої системи зображена на рис. 12.1.

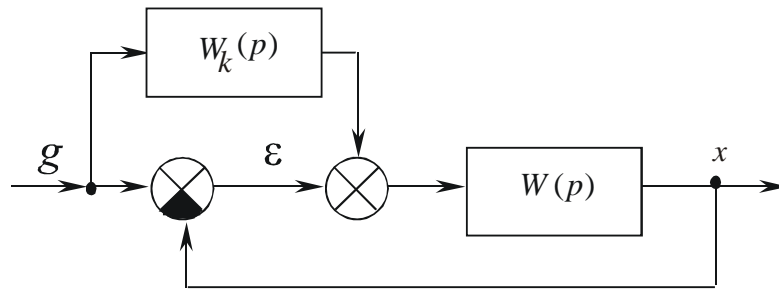


Рис. 12.1. Структурна схема системи комбінованого керування

У випадку відсутності регулювання по задавальному впливу, тобто при $W_k(p) = 0$, регульована величина x пов'язана із задавальним впливом g через передаточну функцію замкненої системи:

$$X = W_g(p)G(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} G(p),$$

де $W(p)$ – передаточна функція розімкненої системи.

При введенні регулювання по задавальному впливу, регульована величина визначається виразом

$$X(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} [1 + W_k(p)] G(p) = W_e(p) G(p).$$

Еквівалентна передаточна функція замкненої системи з урахуванням регулювання по задавальному впливу

$$W_e(p) = \frac{W(p)[1 + W_k(p)]}{1 + W(p)}.$$

З останнього виразу видно, що введення регулювання по задавальному впливу не змінює характеристичного рівняння системи, що працює по відхиленню, тому що знаменник передаточної функції замкненої системи не змінюється. Це означає, що не будуть порушуватися не тільки умови стійкості, але збережуться оцінки якості перехідного процесу, що базуються на використанні коренів характеристичного рівняння.

Передаточна функція по помилці $W_{\varepsilon}(p) = 1 - W_e(p) = \frac{1 - W_k(p) \cdot W(p)}{1 + W(p)},$

і передаточна функція розімкненої системи $W_{pe}(p) = \frac{W_e(p)}{1 - W_e(p)} = \frac{W(p)[1 + W_k(p)]}{1 - W_k(p) \cdot W(p)}$.

Перехід до еквівалентної передаточної функції розімкненої системи $W_{pe}(p)$ (рис. 12.2) дозволяє замінити структурну схему системи комбінованого керування еквівалентною до неї звичайною схемою системи регулювання, що працює по відхиленню.

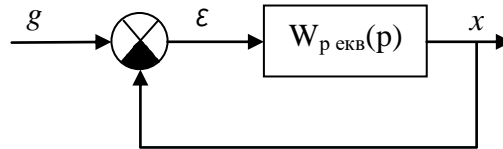


Рис. 12.2. Еквівалентна схема передаточної функції розімкненої системи

Для передаточної функції по помилці можна знайти умову повної інваріантності системи регулювання. Поклавши $W_{\epsilon}(p) = 0$, одержуємо

$$W_k(p) = \frac{1}{W(p)}.$$

Розклавши цей вираз в ряд по зростаючим степеням оператора, одержимо необхідний вигляд функції, що визначає вводимий сигнал від керуючого впливу:

$$W_k(p) = \tau_0 + \tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \tau_3^3 p^3 + \dots, \quad (12.2)$$

де τ_0 – безрозмірне число.

Цей ряд може бути кінцевим і нескінченним. Перший доданок в астатичних системах і в більшості статичних систем виявляється рівним нулю. Це не поширюється на випадок використання комбінованого керування по збурюючому впливу, де практично завжди виходить $\tau_0 \neq 0$.

Таким чином, при введенні регулювання по задавальному впливу, для одержання повної інваріантності необхідно вводити першу та вищі похідні від задавального впливу.

Звичайно точно можна ввести тільки першу похідну, а всі наступні похідні можуть бути отримані приблизно за допомогою використання диференціюючих ланок. Тому практично може бути отримана не повна, а часткова інваріантність. Це відповідає введенню обмеженого числа перших членів розкладання (12.2).

Так, наприклад, введенням першої похідної від задавального впливу у системі з астатизмом першого порядку можна одержати рівною нулю швидкісну помилку, тобто підвищити степінь астатизму щодо задавального впливу на одиницю. Якщо ввести першу і другу похідні (навіть приблизно), можна підвищити степінь астатизму на два і т.д.

У деяких випадках сигнал по задавальному впливу може вводиться не безпосередньо на вхід системи, а в деяку точку всередині каналу регулювання (рис. 12.3).

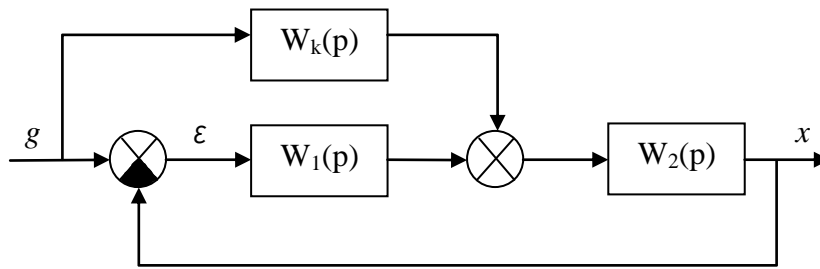


Рис. 12.3.

Користуючись правилом перетворення структурних схем, перенесемо суматор назад по колу (рис. 12.4).

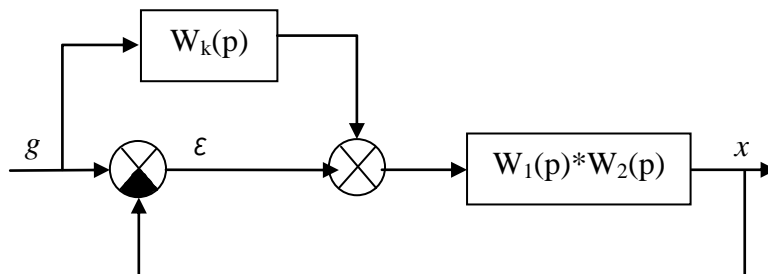


Рис. 12.4.

У цьому більш загальному випадку еквівалентна передаточна функція замкненої системи буде мати вигляд

$$W_{екв}(p) = \frac{W_1(p)W_2(p) \left[1 + \frac{W_k(p)}{W_1(p)} \right]}{1 + W_1(p)W_2(p)}$$

Якщо

$$\frac{W_k(p)}{W_1(p)} = -1,$$

то $W_{екв}(p) = 0$ для будь-якого впливу.

Еквівалентна передаточна функція по помилці

$$W_{\varepsilon\text{ екв}}(p) = \frac{1 - W_k(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}$$

Умова повної інваріантості

$$W_{\varepsilon\text{ екв}}(p) = 0,$$

що призводить до рівності:

$$W_k(p) = \frac{1}{W_2(p)}.$$

Еквівалентна передаточна функція розімкненої системи (рис. 12.5):

$$W_{p\text{ екв}}(p) = \frac{W_{\text{екв}}(p)}{1 - W_{\text{екв}}(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) [1 + W_k(p)]}{1 - W_k(p) \cdot W_1(p) \cdot W_2(p)}.$$

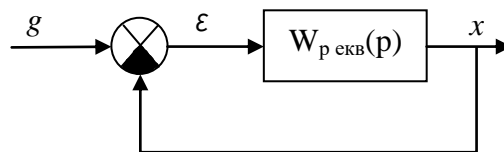


Рис. 12.5. Еквівалентна схема розімкненої системи

Комбіноване керування може бути використане також для зниження помилок від збурення.

У цьому випадку поряд з регулюванням по відхиленню $\varepsilon(t)$ використовується регулювання по збуренню $f(t)$.

Передаточна функція по збуренню тут буде мати вигляд (рис. 12.6):

$$W_f(p) = \frac{W_3(p) \cdot (W_4(p) \cdot W_2(p) - 1)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)},$$

де $W_{pf}(p)$ – передаточна функція по даному збуренню в розімкненій системі, $W(p)$ – передаточна функція розімкненої системи.

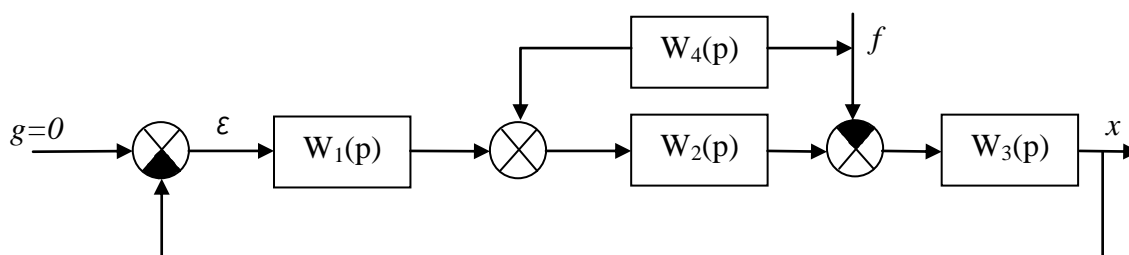


Рис. 12.6.

Умова повної інваріантості може бути отримана, якщо покласти $W_f(p) = 0$. Тоді будемо мати

$$W_k(p) = \frac{W_{pf}(p)}{W(p)}$$

Ця функція може бути представлена у вигляді ряду

$$W_k(p) = k_F (\tau_0 + \tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \tau_3^3 p^3 + \dots),$$

де τ_0 – безрозмірне число (1 чи 0), а k_F - деякий коефіцієнт, розмірність якого збігається з розмірністю передаточної функції $W_f(p)$.

Як і у випадку використання регулювання по задавальному впливу, одержання повної інваріантості затрудняється необхідністю вводити першу і більш високі похідні від збурення $f(t)$. Тому використовується, як правило, часткова інваріантність, що виходить при реалізації в системі регулювання перших членів розкладання.

На закінчення відзначимо, що можливо використання комбінованих систем із введенням регулювання по декількох обурюючі впливах, і одержанням повної чи часткової інваріантості по кожному з них. Однак це приводить до ускладнення схеми.

НЕОДИНИЧНІ ЗВОРОТНІ ЗВ'ЯЗКИ

Неодиначні зворотні зв'язки застосовуються для зменшення помилки, викликаній задавальним впливом, у замкненій системі регулювання. На відміну від звичайної схеми регульована величина $x(t)$ надходить на порівняння на чуттєвий елемент по головному зворотному зв'язку з передаточною функцією, не рівною одиниці, тобто $W_k(p) \neq 1$ (рис. 12.7, а).

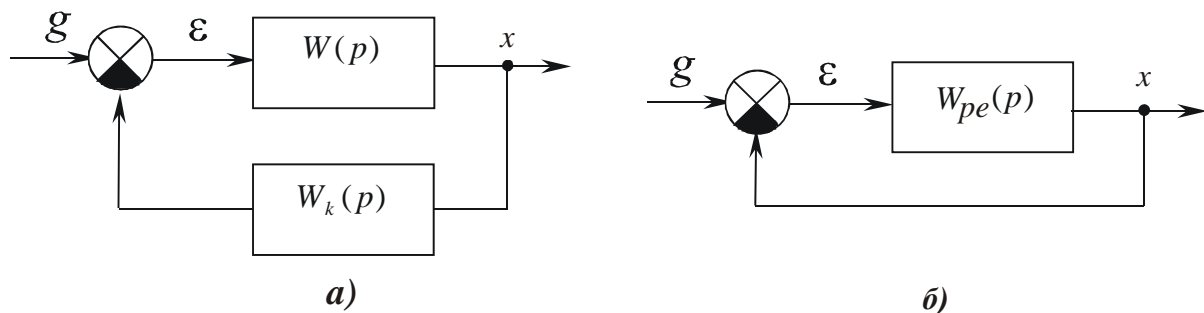


Рис. 12.7.

У цьому випадку регульована величина буде визначатися виразом

$$X(p) = \frac{W(p)}{1 + W_k(p) \cdot W(p)} G(p) = W_e(p) \cdot G(p)$$

Для одержання повної інваріантості необхідно виконати умову $W_e(p) = 1$. Звідси можна знайти необхідну передаточну функцію головного зворотного зв'язку:

$$W_k(p) = \frac{W(p) - 1}{W(p)}. \quad (12.3)$$

При розкладанні цього виразу в степеневий ряд одержуємо

$$W_k(p) = \tau_0 - (\tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \tau_3^3 p^3 + \dots).$$

Звідси видно, що для одержання повної інваріантості необхідно використовувати головний зворотний зв'язок з коефіцієнтом передачі, у загальному випадку відмінним від одиниці: $\tau_0 \neq 1$ (в астатичних системах $\tau_0 = 1$), і додатково ввести позитивні зворотні зв'язки по похідних від регульованої величини.

Реалізація повної інваріантості, практично неможлива. Це визначається, по-перше, неможливістю точного введення вищих похідних, а по-друге, тим, що при виконанні умови (12.3) система буде знаходитися на границі стійкості. Тому неодиначні зворотні зв'язки використовуються лише як засіб підвищення точності замкненої системи регулювання.

Аналогічно тому, як це робилося для систем комбінованого керування, структурну схему з неодиначним зворотним зв'язком (рис. 12.7, а) можна замінити еквівалентною схемою з одиничним головним зворотним зв'язком, але з деякою еквівалентною передаточною функцією розімкненої системи $W_{pe}(p)$ (рис. 12.7, б). Остання може бути визначена з рівності передаточних функцій замкненої системи двох схем (рис. 12.7, а і б):

$$W_z(p) = \frac{W(p)}{1 + W_k(p) \cdot W(p)} = \frac{W_{pe}(p)}{1 + W_{pe}(p)}.$$

Звідси знаходимо:

$$W_{pe}(p) = \frac{W(p)}{1 - [1 - W_k(p)]W(p)}.$$

Найбільш ефективним вплив неодиначного зворотного зв'язку виявляється в статичній системі. Тут простою зміною коефіцієнта передачі жорсткого головного зворотного зв'язку можна одержати астатизм відносно керуючого впливу.

Аналогічні результати (тобто знищення статичної помилки від задавального впливу, у статичній системі) можна одержати способом масштабування вхідної чи вихідної величини системи регулювання (рис. 12.8).

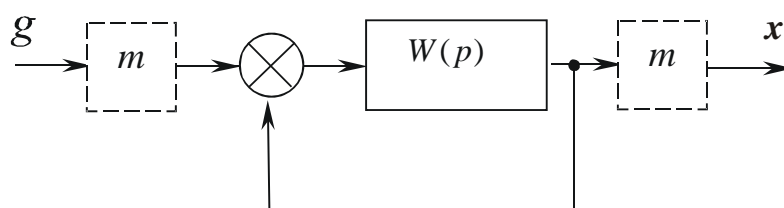


Рис. 12.8.

Якщо на вході чи виході системи включити масштабувальний пристрій з коефіцієнтом передачі $m = K + 1/K$, то регульована величина $x(t)$ буде зв'язана з задавальним впливом $g(t)$ співвідношенням

$$X(p) = \frac{W(p)}{1 + W} \frac{K + 1}{K} G(p).$$

У сталому режимі при статичному регулюванні $W(0) = K$. Тому для встановленого режиму при $g(t) = g_0 = \text{const}$

$$X_{уст} = \frac{K}{K+1} \frac{K+1}{K} g_0 = g_0,$$

що відповідає відсутності статичної помилки. Таке масштабування робиться практично у всіх статичних системах регулювання, що дозволяє розглядати їх стосовно задавального впливу, як астатичні.

БАГАТОВИМІРНІ АВТОМАТИЧНІ СИСТЕМИ

Багатовимірними називаються такі САК, що мають два і більш вхідних задавальних впливів та декілька регульованих величин. Кількість збурюючих впливів може бути різною (в одновимірних – один задавальний вплив, одна вхідна величина і кілька збурювань). До багатовимірних систем відносяться системи регулювання напруги і частоти синхронних генераторів, електроприводів постійного струму, системи керування рухливих об'єктів, багато систем регулювання технологічних процесів і т.д.

Для опису процесів у складних САК застосовується матрична форма запису рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = RY(t) + Qg(t) \\ X(t) = \tau^T Y(t) \end{cases}$$

де $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_3(t) \end{bmatrix}$ – вектор змінних стану; R , Q – матриці постійних

коефіцієнтів $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots & q_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \dots & q_{nm} \end{bmatrix}$, $X(t)$

– вихідна (регульована) величина; T – символ транспонування.

$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_n \end{bmatrix}$ – вектор коефіцієнтів, $g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \dots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$ – вектор вхідних впливів.

Застосуємо до лівої і правої частини рівняння перетворення Лапласа. Тоді при нульових початкових умовах одержимо

$$\begin{cases} pY(p) = RY(p) + QG(p) \\ X(p) = \tau^T Y(p) \end{cases},$$

чи $(pI - R)Y(p) = QG(p)$, або $Y(p) = (pI - R)^{-1} QG(p)$, де I – одинична матриця $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(pI - R)^{-1}$ – обернена матриця.

Тоді $X(p) = \tau^T (pI - R)^{-1} QG(p)$.

Матриця $W(p) = \tau^T (pI - R)^{-1} Q$ називається **передаточною функцією від входу до виходу**.

Приклад багатовимірної системи. На рис. 12.9. Зображено схему багатовимірної системи.

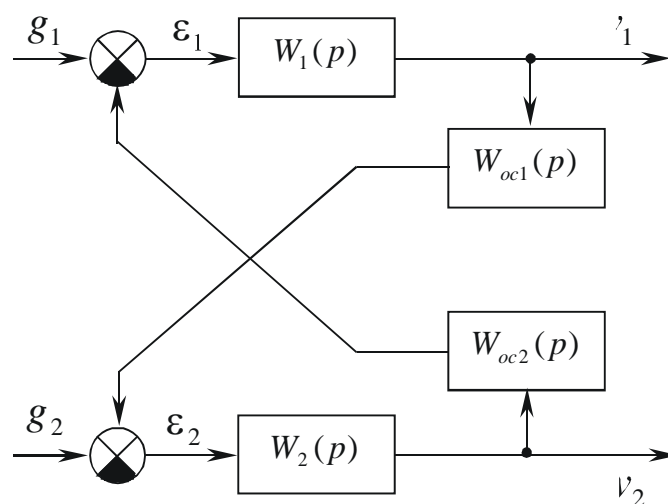


Рис. 12.9. Схема багатовимірної системи

Рівняння, що зв'язують вхідні і вихідні величини

$$\begin{cases} y_1(p) = W_1(p) \cdot g_1(p) - W_1 \cdot W_{oc2} \cdot y_2(p) \\ y_2(p) = W_2(p) \cdot g_2(p) - W_2 \cdot W_{oc1} \cdot y_1(p) \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} W_1(p) \cdot g_1(p) = y_1(p) + W_1 \cdot W_{oc2} \cdot y_2(p) \\ W_2(p) \cdot g_2(p) = y_2(p) + W_2 \cdot W_{oc1} \cdot y_1(p) \end{cases}$$

$$G(p) = M(p) \cdot Y(p)$$

$$G(p) = \begin{bmatrix} g_1(p) \\ g_2(p) \end{bmatrix}. \quad M(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{W_1(p)} & W_{oc2}(p) \\ W_{oc1}(p) & \frac{1}{W_2(p)} \end{bmatrix}; \quad Y(p) = \begin{bmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \end{bmatrix}; \quad Y(p) = W(p) \cdot G(p),$$

$$W(p) = M^{-1}(p)$$

Для багатовимірних систем характерна поява нових властивостей, що виражаються в:

- керованості
- спостережуваності
- стабілізованості

Система називається цілком керованою, якщо її можна за допомогою керуючого впливу (задавального) за кінцевий час перевести з будь-якого початкового стану x_0 в початок координат $x = 0$.

Відповідно до **теореми Калмана** про керованість судять за рангом матриці $n \times n$

$$F = [Q : RQ : R^2Q : \dots : R^{n-1}Q]$$

Система буде цілком керованою, якщо ранг матриці F дорівнює n .

Приклад. Визначити чи керована САК, що описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = y_1(t) + y_2(t) \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = y_1(t) + g(t) \end{cases} \quad \text{або} \quad \frac{dY}{dt} = RY(t) + Qg(t),$$

де $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $x(t) = y_2(t)$

Система другого порядку $n=2$. Отже, для побудови матриці F буде потрібно Q та RQ

$$RQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{тоді} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \det F = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Ранг матриці F дорівнює 2, отже, система цілком керована.

Система називається цілком спостережуваною, якщо в результаті спостереження її вихідних величин x при заданих вхідних керуваннях g можна визначити всі координати початкового стану системи.

Теорема Калмана. Система буде цілком спостережуваною, якщо матриця $H = [r : R^T r : (R^T)^2 r : \dots : (R^T)^{n-1} r]$ має ранг рівний n .

Приклад. Визначити чи є спостережуваною САК, розглянута вище.

$$r^T = [0, 1]; \quad R^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad R^T r = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Складаємо матрицю H

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \det H = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Система цілком спостережувана.

Для того щоби система була керована та спостережувана, необхідно і достатньо, щоб передаточна матриця системи була не виродженою (ранг дорівнює n).

Система називається стабілізованою, якщо існує такий зворотний зв'язок $G(p) = S \cdot X(p)$, де S - постійна матриця, що замкнена система є стійкою.

ІНВАРІАНТІСТЬ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ

Для знаходження умови інваріантності запишемо рівняння, що описують процеси в САК у матричній формі

$$M(p) \cdot Y(p) = G(p),$$

$$\text{де } M(p) = \begin{bmatrix} M_{11}(p) & M_{12}(p) & \dots & M_{1n}(p) \\ M_{21}(p) & M_{22}(p) & \dots & M_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1}(p) & M_{n2}(p) & \dots & M_{nn}(p) \end{bmatrix}; \quad Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \\ \dots \\ Y_n(p) \end{bmatrix};$$

$$G(p) = \begin{bmatrix} q_1 \cdot G_1(p) \\ q_2 \cdot G_2(p) \\ \dots \\ q_n \cdot Y_n(p) \end{bmatrix}; \quad q_1, \dots, q_n - \text{постійні коефіцієнти.}$$

Умову інваріантності будемо розглядати як незалежність $Y_i(p)$ величини стосовно j -того задавального впливу $G_j(p)$. Нехай у результаті зміни $G_j(p)$ на величину $\Delta G_j(p)$ змінилися усі вихідні величини $Y_k(p)$ на $\Delta Y_k(p)$, окрім $Y_i(p)$.

Система рівнянь буде мати наступний вигляд

$$M(p) \begin{bmatrix} Y_1(p) + \Delta Y_1(p) \\ Y_2(p) + \Delta Y_2(p) \\ \dots \\ Y_i(p) \\ \dots \\ Y_n(p) + \Delta Y_n(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 G_1(p) \\ q_2 G_2(p) \\ \dots \\ q_j (G_j(p) + \Delta G_j(p)) \\ \dots \\ q_n G_n(p) \end{bmatrix}$$

Віднімаючи з цієї системи рівнянь вихідну, одержимо

$$M(p) \begin{bmatrix} \Delta Y_1(p) \\ \Delta Y_2(p) \\ \dots \\ \Delta Y_{i-1}(p) \\ 0 \\ \Delta Y_{i+1}(p) \\ \dots \\ \Delta Y_n(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ q_j \Delta G_j(p) \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Цю систему можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{matrix} & & & & i & & & & \\ j & \begin{bmatrix} M_{11}(p) & M_{12}(p) & \dots & M_{1,i-1}(p) & 0 & M_{1,i+1}(p) & \dots & M_{1n}(p) \\ M_{21}(p) & M_{22}(p) & \dots & M_{2,i-1}(p) & 0 & M_{2,i+1}(p) & \dots & M_{2n}(p) \\ \dots & & & & & & & \\ M_{j1}(p) & M_{j2}(p) & \dots & M_{j,i-1}(p) & -q_j & M_{j,i+1}(p) & \dots & M_{jn}(p) \\ M_{j+1,1}(p) & M_{j+1,2}(p) & \dots & M_{j+1,i-1}(p) & 0 & M_{j+1,i+1}(p) & \dots & M_{j+1,n}(p) \\ \dots & & & & & & & \\ M_{n1}(p) & M_{n2}(p) & \dots & M_{n,i-1}(p) & 0 & M_{n,i+1}(p) & \dots & M_{nn}(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Y_1(p) \\ \Delta Y_2(p) \\ \vdots \\ \Delta Y_{i-1}(p) \\ \Delta G_j(p) \\ \Delta Y_{i+1}(p) \\ \vdots \\ \Delta Y_n(p) \end{bmatrix} & = & 0 \end{matrix}$$

Ця система еквівалентна попередній, що можна перевірити, обчисливши добуток матриці на вектор. Отримана система буде мати рішення, якщо визначник матриці буде дорівнювати нулю. Наявність рішення відповідає інваріантності величини $Y_i(p)$ стосовно $G_j(p)$ впливу.

Необхідно підкреслити, що принцип абсолютної інваріантності можна здійснити тільки в системі, у якій між точкою прикладення збурюючого впливу g_j та виходом y_i існує щонайменше два канали (принцип 2-х каналності).

Приклад. Знайти умову інваріантності величини $Y_1(p)$ стосовно впливу $f(p)$ для наступної САК (рис. 12.10).

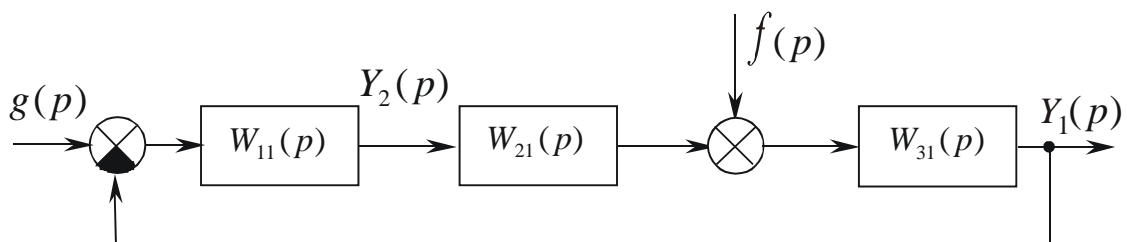


Рис. 12.10.

Складемо систему рівнянь, яка описує процеси в даній САК:

$$\begin{cases} Y_2(p) = W_{11}(p) \cdot [g(p) - Y_1(p)] \\ Y_1(p) = W_{31}(p) \cdot f(p) + W_{21}(p) \cdot W_{31}(p) + Y_2(p) \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} W_{11}(p) \cdot Y_1(p) + Y_2(p) = W_{11}g(p) \\ Y_1(p) - W_{21}(p) \cdot W_{31}(p) \cdot Y_2(p) = W_{31}f(p) \end{cases},$$

У матричній формі остання система рівнянь буде мати вигляд:

$$M(p) \cdot Y(p) = G(p),$$

де $M(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & 1 \\ 1 & -W_{21}(p) \cdot W_{31}(p) \end{bmatrix}$; $Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \end{bmatrix}$; $G(p) = \begin{bmatrix} W_{11}g(p) \\ W_{31}f(p) \end{bmatrix}$

Відповідно до розглянутого раніше критерію необхідно в першому стовпці ($i = 1$) замінити всі елементи на 0, а в другому рядку ($j = 2$) цього стовпця записати елемент $-W_{31}$. Визначник отриманої матриці повинен дорівнювати 0.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -W_{31}(p) & -W_{21}(p) \cdot W_{31}(p) \end{bmatrix} = 0,$$

тобто $\Delta = W_{31}(p) = 0$. Однак така система не буде працездатною, а отже в даній системі домогтися повної інваріантості неможливо.

Введемо в розглянуту систему ланку з передаточною функцією $W_{12}(p)$

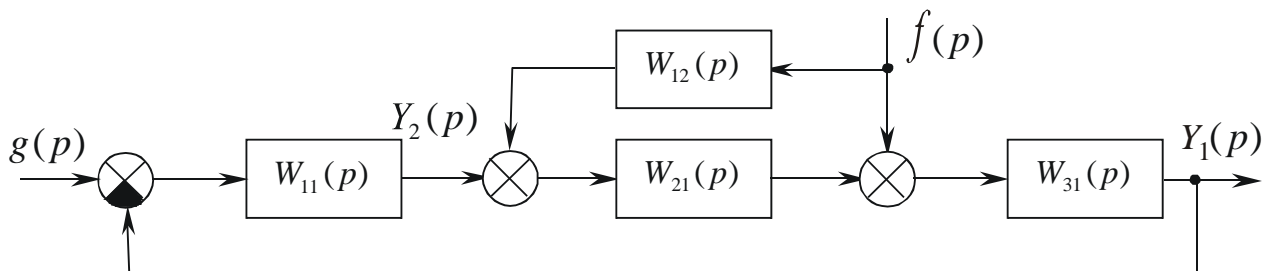


Рис. 12.11.

Складемо рівняння:

$$\begin{cases} Y_2(p) = W_{11}(p) \cdot [g(p) - Y_1(p)] \\ Y_2(p) = W_{31}(p) \cdot [f(p) + W_{21}(p) \cdot (Y_2(p) + W_{12}(p) \cdot f(p))] \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} W_{11}(p) \cdot Y_1(p) + Y_2(p) = W_{11}g(p) \\ Y_1(p) - W_{21}(p) \cdot W_{31}(p) \cdot Y_2(p) = W_{31}(p) \cdot (1 + W_{12}(p) \cdot W_{21}(p)) \cdot f(p) \end{cases}.$$

Тоді будемо мати:

$$M(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & 1 \\ 1 & -W_{21}(p) \cdot W_{31}(p) \end{bmatrix}; \quad G(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) \cdot g(p) \\ W_{31}(1 + W_{12} \cdot W_{21})f(p) \end{bmatrix}$$

Дослідження інваріантності даної системи зводиться до обчислення визначника:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -W_{31}(p) \cdot [1 + W_{12}(p) \cdot W_{21}(p)] & -W_{21}(p) \cdot W_{31}(p) \end{bmatrix} = 0$$

З умови $\Delta = 0$ одержуємо $W_{31}(p) \cdot [1 + W_{12}(p) \cdot W_{21}(p)] = 0$. Так як $W_{31}(p) \neq 0$, то $W_{12}(p) = -1/W_{21}(p)$.

Таким чином, повна інваріантність може бути досягнута, якщо буде забезпечене виконання умови $W_{12}(p) = -1/W_{21}(p)$.

РОЗДІЛ 2. ІМПУЛЬСНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Тема 2.1. Поняття дискретних систем. Математичний опис імпульсних систем

Лекція 13. Поняття про дискретні системи. Види та роди Імпульсної модуляції

ПОНЯТТЯ ПРО ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ. КЛАСИФІКАЦІЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Система автоматичного керування називається дискретною, якщо вихідна величина якого-небудь з її елементів має дискретний характер. Перетворення неперервних сигналів у дискретні пов'язано з наявністю в системі дискретного елемента, який виробляє на виході послідовність імпульсів. Розрізняють дискретність за рівнем та за часом.

Сигнали, дискретні за рівнем отримують у результаті квантування сигналу за рівнем, тобто фіксації дискретних рівнів у довільні моменти часу. Квантування за рівнем здійснюється за допомогою заміни неперервно змінної величини найближчими до неї фіксованими дискретними значеннями, що виражаються, наприклад, цілими числами x_0, x_1, \dots, x_n (рис. 13.1, а).

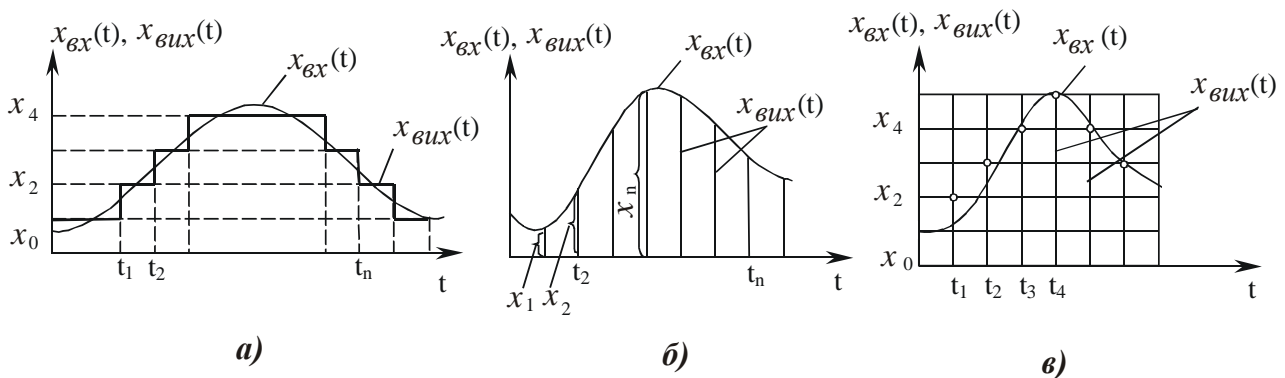


Рис. 13.1.

Квантування за рівнем у найпростішому випадку здійснюється релейним елементом, вихідна величина якого може приймати кінцеве число фіксованих рівнів, що як правило, дорівнює двом чи трьом. Прикладом систем, у яких здійснюється квантування за рівнем, можуть служити релейні системи автоматичного керування, які є істотно нелінійними системами.

Сигнали, дискретні за часом, виходять у результаті квантування сигналу за часом, тобто фіксації дискретних моментів часу $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ (рис. 13.1, б), при яких рівні вхідного сигналу можуть приймати довільні значення $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Квантування за часом здійснюється імпульсним елементом і застосовується в імпульсних системах.

Поряд з роздільним квантуванням за рівнем і за часом, у багатьох випадках застосовується *одночасне квантування за рівнем і за часом*, коли

неперервний сигнал замінюється дискретними за рівнем значеннями, найближчими до значень неперервного сигналу в дискретні моменти часу (рис. 13.1, в). У результаті такого квантування неперервна величина перетворюється на цифрову.

Квантування сигналів за рівнем і за часом здійснюється кодо-імпульсним модулятором або цифровим обчислювальним пристроєм (ЦОП). Системи автоматичного регулювання, у яких застосовується в якості дискретного елементу цифровий обчислювальний пристрій чи кодо-імпульсний модулятор, називаються цифровими.

Дискретні системи широко використовуються в пристроях силової електроніки так як дозволяють одержати високий ККД і хороші масо-габаритні показники. До першої і другої груп відносяться імпульсні стабілізатори напруги і струму, випрямлячі, перетворювачі частоти, інвертори напруги і струму. Системи керування різних пристроїв силової електроніки в багатьох випадках будуються на основі мікропроцесорів або однокристальних мікро ЕОМ.

У подальшому основну увагу приділимо розгляданню імпульсних САР.

ІМПУЛЬСНІ САР

Імпульсні системи автоматичного регулювання (ІСАР) містять імпульсний елемент, який перетворює неперервний вхідний сигнал у послідовність імпульсів. У найпростіших випадках структурні схеми ІСАК мають вигляд, зображений на рис. 13.2.

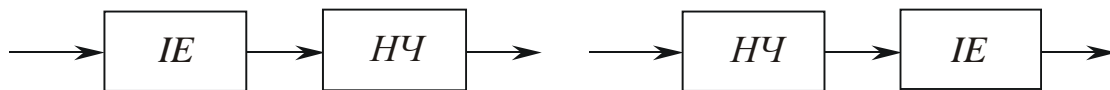


Рис. 13.2. Структурна схема ІСАР

де ІЕ – імпульсний елемент; НЧ – неперервна частина.

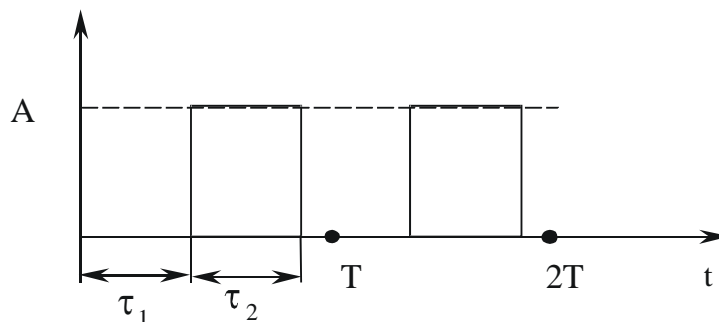


Рис. 13.3.

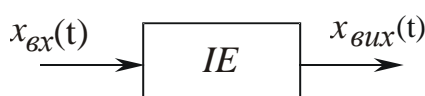


Рис. 13.4.

В залежності від вигляду модульованого параметра розрізняють наступні види модуляції (рис. 13.5):

1. Амплітудно-імпульсна модуляція (АІМ), $A - var$.
2. Широтно-імпульсна модуляція (ШІМ), $\tau_2 - var$.
3. Фазо-імпульсна (ФІМ) модуляція, $\tau_1 - var$, тобто змінюється положення імпульсу на інтервалі T .
4. Частотно-імпульсна модуляція (ЧІМ), $f = 1/T - var$.

Модуляцію розрізняють також за характером зв'язку між вхідним (модулюючим) сигналом і модульованим параметром на модуляцію I-го, II-го роду. Якщо модульований параметр визначається значеннями вхідного сигналу у фіксовані, рівновіддалені один від одного моменти часу (тактові), то це модуляція першого роду (АІМ-I, ШІМ-I і т.д.) Якщо значення модульованого параметра визначаються деяким функціоналом від вхідного сигналу, або визначаються в результаті розв'язку трансцендентних рівнянь - то це модуляція другого роду (АІМ-II, ШІМ-II і т.д.). Іншими словами, якщо модульований параметр у процесі існування імпульсу залишається постійним, то це модуляція першого роду, якщо ж модульований параметр змінюється відповідно до поточного значення вхідного сигналу – то це модуляція другого роду.

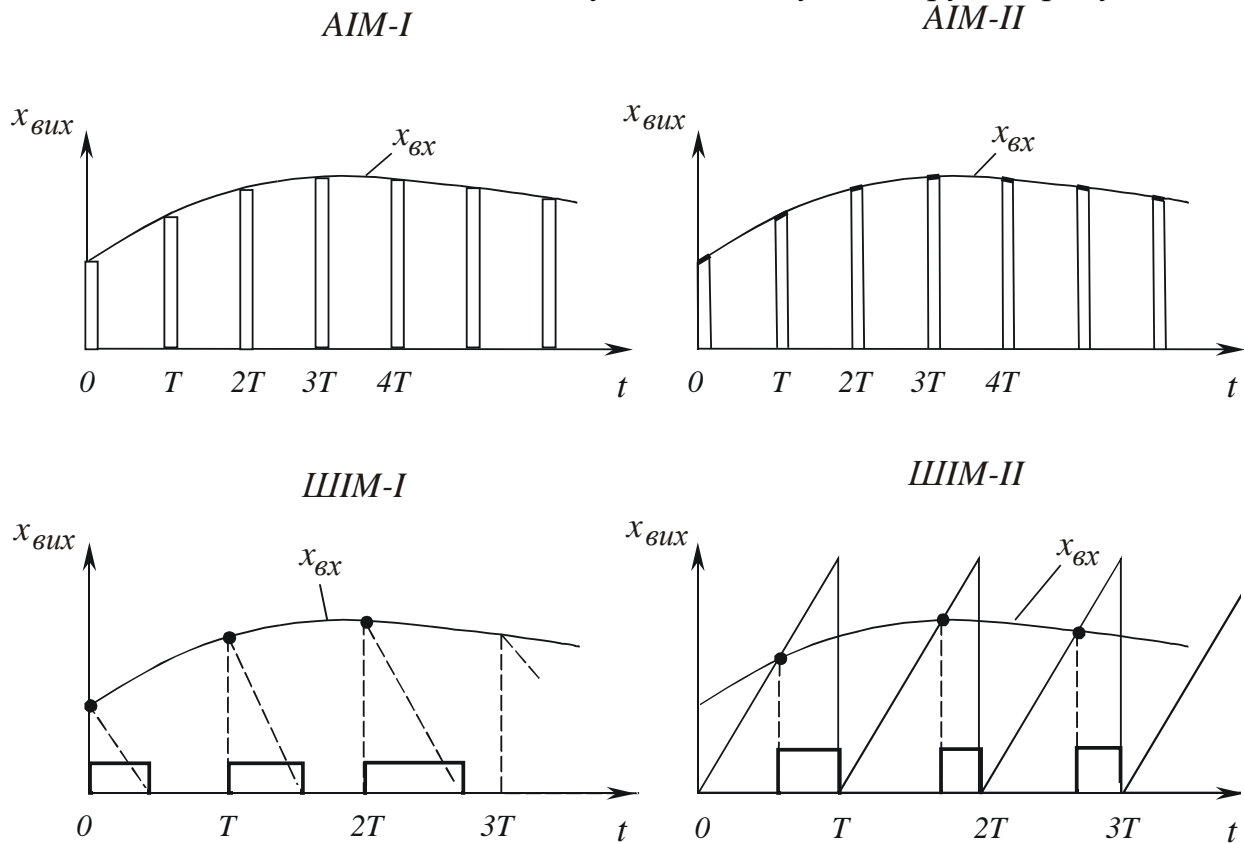


Рис. 13.5.

Модуляційною характеристикою імпульсного елемента називається залежність величини модульованого параметру імпульсної послідовності від

відповідних дискретних значень вхідної величини. Ця характеристика може бути лінійною або нелінійною. ШІМ і ЧІМ нелінійні по своїй природі. Так для ШІМ найменша тривалість імпульсу дорівнює нулю, а найбільша – періоду T . Модуляційна характеристика може мати вигляд, показаний на рис 13.6.



Рис. 13.6. Модуляційна характеристика

СКЛАДАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ІСАР

При аналізі імпульсних систем в якості аналогів диференціальних рівнянь використовують різницеві рівняння (рівняння в кінцевих різницях). Методику складання різницевих рівнянь розглянемо на прикладі:

На рис. 13.7 зображена схема понижувального широтно-імпульсного перетворювача.

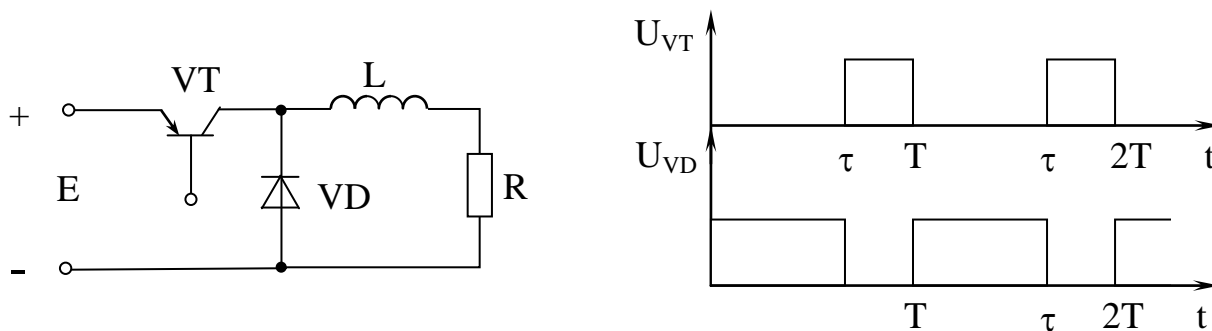


Рис. 13.7. Схема понижувального широтно-імпульсного перетворювача

Даний перетворювач має наступний алгоритм роботи:

- на інтервалі $0 \leq t \leq \tau$ в базу транзистора подається імпульс негативної полярності, транзистор відкривається і енергія передається від джерела до навантаження. У момент часу $t = \tau$ транзистор закривається, а струм навантаження замикається через зворотний діод VD під дією ЕРС самоіндукції.

Будемо вважати, що переключення транзистора і діода відбувається миттєво.

Для складання еквівалентної схеми скористаємося RS -моделлю (у відкритому стані опір транзистора R_T , діода – R_D , а в закритому стані – опір нескінченно великий). Еквівалентна схема може бути зображена у вигляді, зображеному на рис. 13.8.

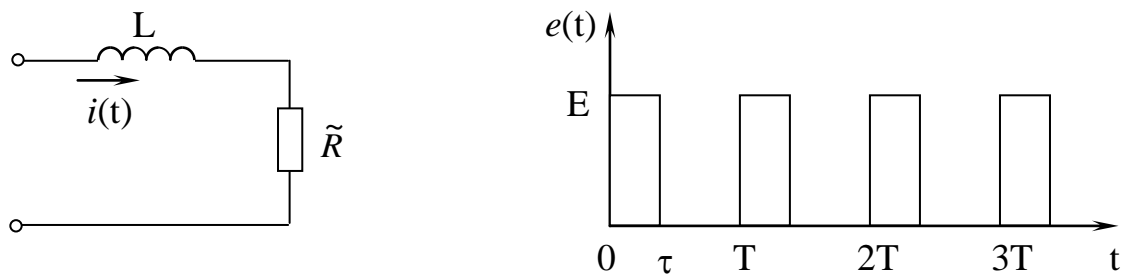


Рис. 13.8. Еквівалентна схема понижувального широтно-імпульсного перетворювача

$$\tilde{R} = R + R_{gp} + R_T \gamma + R_D (1 - \gamma); \quad \gamma = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau \\ t \leq T \end{cases},$$

де R_{gp} - активний опір дроселя (опір втрат).

Струм $i(t)$ визначається рішенням диференціального рівняння

$$e(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \tilde{R} \cdot i(t)$$

Розглянемо m -й період роботи схеми. Для інтервалу часу $mT \leq t \leq mT + \tau$ операторна схема заміщення з урахуванням початкових умов буде мати вигляд рис. 13.9.

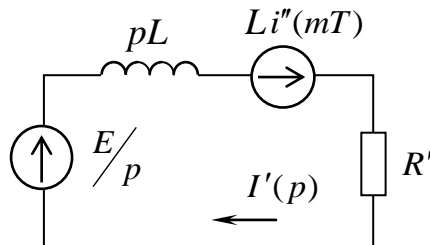


Рис. 13.9. Операторна схема заміщення понижувального широтно-імпульсного перетворювача, $i''(mT)$ – струм у дроселі на початку m -го періоду;

$$R' = R + R_{gp} + R_T$$

Очевидно, справедливе співвідношення:

$$\frac{E}{p} e^{-pmT} = pLI'(p) + R'I'(p) - Li''(mT)e^{-pmT},$$

де множник e^{-pmT} , враховує зсув початку відліку у точку $t = mT$.

Для зображення струму можна записати:

$$I'(p) = \left[\frac{E}{p(pL + R')} + \frac{Li''(mT)}{pL + R'} \right] \cdot e^{-pmT}.$$

Оригінал струму

$$i'(t) = \frac{E}{R'} \left[1 - e^{-\alpha'(t-mT)} \right] + i''(mT) \cdot e^{-\alpha'(t-mT)}, \text{ де } \alpha' = R'/L.$$

Наприкінці розглянутого інтервалу $t = mT + \tau$:

$$i'(mT + \tau) = \frac{E}{R'} \left[1 - e^{-\alpha'\tau} \right] + i''(mT) \cdot e^{-\alpha'\tau}.$$

На інтервалі часу $mT + \tau \leq t \leq (m+1)T$ операторна схема заміщення має вигляд, зображений на рис. 13.10.

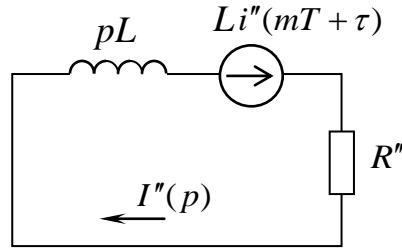


Рис. 13.10.

$$0 = pLI''(p) + R''I''(p) - Li''(mT + \tau)e^{-p(mT+\tau)};$$

$$I''(p) = \frac{Li''(mT + \tau)}{pL + R''};$$

$$i''(t) = i'(mT + \tau) \cdot e^{-\alpha''(t-mT-\tau)}; \alpha'' = R''/L.$$

Наприкінці m -го періоду для $t = (m+1)T$ можна дописати:

$$i''((m+1)T) = i'(mT + \tau) \cdot e^{-\alpha''(T-\tau)} = \left[\frac{E}{R'} (1 - e^{-\alpha'\tau}) + i''(mT) \cdot e^{-\alpha'\tau} \right] \cdot e^{-\alpha''(T-\tau)}$$

У такий спосіб ми одержали вираз, що зв'язує значення струму на початку і кінці m -го періоду

$$i''((m+1)T) + a_0 i''(mT) = b_0$$

$$\text{де } a_0 = -e^{-\alpha'\tau} \cdot e^{-\alpha''(T-\tau)}; b_0 = \frac{E}{R'} (1 - e^{-\alpha'\tau}) \cdot e^{-\alpha''(T-\tau)}.$$

Це різницеве рівняння першого порядку. У загальному випадку лінійне різницеве рівняння n -го порядку записують у вигляді:

$$\begin{aligned} a_n x((m+n)T) + a_{n-1} x((m+n-1)T) + \dots + a_0(mT) = \\ = b_v g((m+v)T) + b_{v-1} g((m+v-1)T) + b_0 g(mT) \end{aligned}$$

За допомогою різницевого рівняння описують динамічні процеси в імпульсних САР.

Лекція 14. Поняття про решітчасті функції. Дискретне перетворення Лапласа та його властивості. Обернене дискретне перетворення Лапласа

ПОНЯТТЯ ПРО РЕШІТКОВІ ФУНКЦІЇ

Імпульсна система реагує лише на дискретні значення неперервної функції, яка впливає на вхід імпульсного елемента. Тому досить знати значення цієї функції тільки у дискретні моменти часу, тобто неперервну функцію $f(t)$ можна замінити функцією дискретного аргументу – решітковою функцією $f(nT)$ (рис. 14.1).

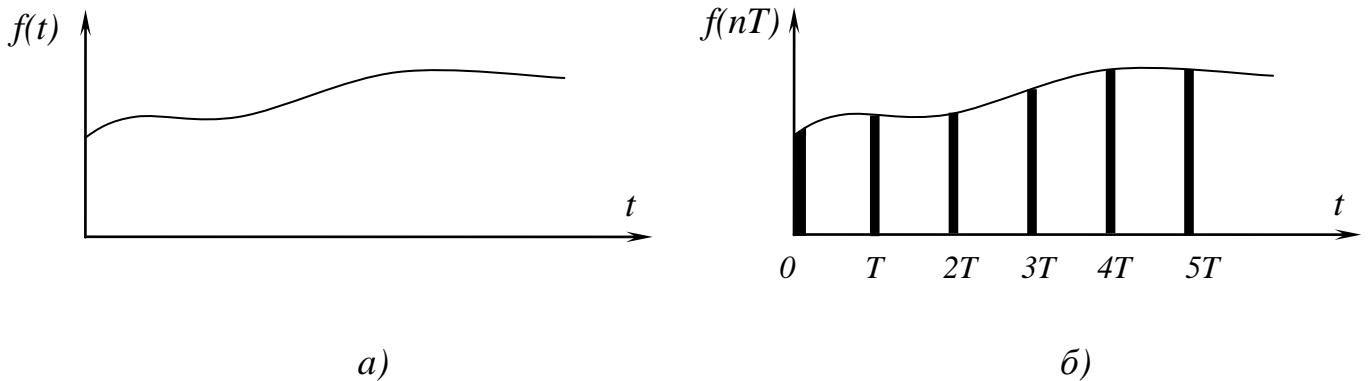


Рис. 14.1.

Решіткову функцію утворюють ординати неперервної функції, що відповідають дискретним рівновіддаленим один від одного значенням незалежної змінної. Решіткова функція існує тільки при дискретних значеннях аргументу. Між цими значеннями аргументу решіткова функція дорівнює нулю. Для одержання решіткової функції $f(nT)$, яка відповідає неперервній функції $f(t)$, потрібно замінити t на nT , де T – період квантування (дискретизації); n – будь-яке ціле число. Для виявлення поведінки неперервної функції між окремими дискретними моментами часу вводять зміщення Δt , що може змінюватися від 0 до T .

Решіткова функція $f(nT \pm \Delta t)$ називається *зміщеною* і позначається $f(nT, \Delta t)$ (рис. 14.2).

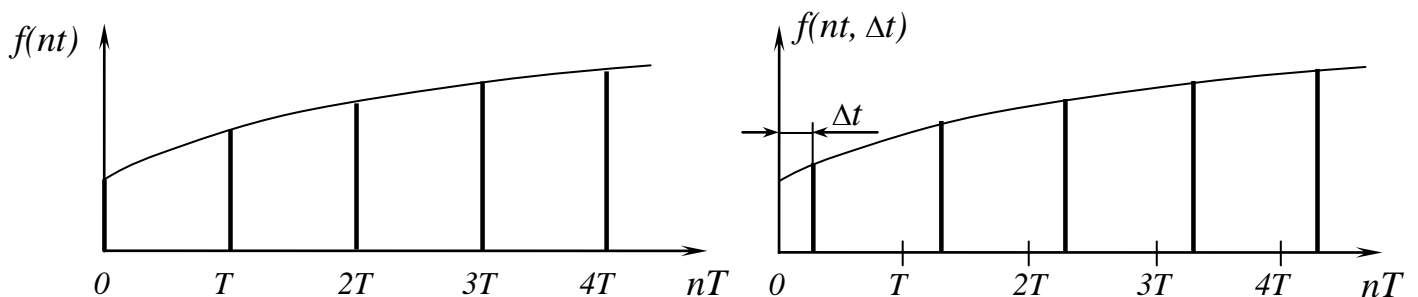


Рис. 14.2.

ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Для решіткових функцій вводять поняття дискретного перетворення Лапласа (D -перетворення):

$$X^*(p) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \cdot e^{-pmT} = D\{x(mT)\} ;$$

для зміщених функцій:

$$X^*(p, \Delta t) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT, \Delta t) \cdot e^{-pmT} = D\{x(mT, \Delta t)\} .$$

Як і у випадку неперервного перетворення Лапласа, комплексна величина $p = \sigma + j\omega$, де σ - абсциса абсолютної збіжності. Якщо $\sigma < \infty$, то ряд збігається і для решіткової функції-оригіналу існує деяке зображення.

Очевидно, що при $\Delta t = 0$ $X^*(p, 0) = X^*(p)$.

Розглянемо основні властивості D – перетворення.

1. Властивість лінійності

Нехай існують $X_k^*(p) = D\{x_k(mT)\}$, $k = 1, \dots, n$, тоді

$$D\left\{\sum_{k=1}^n a_k x_k(mT)\right\} = \sum_{k=1}^n a_k D\{x_k(mT)\} = \sum_{k=1}^n a_k X_k^*(p)$$

2. Властивість запізнення

Нехай $X^*(p) = D\{x(mT)\}$. Розглянемо решіткову функцію, зміщену вправо на s періодів $x((m-s)T)$. Замінімо $m-s$ на k , тобто $k=m-s$. Тоді одержимо

$$\begin{aligned} D\{x((m-s)T)\} &= \sum_{k=-s}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-pT(s+k)} = e^{-psT} \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-pkT} + \sum_{k=-s}^{-1} x(kT) \cdot e^{-pkT} \right] = \\ &= e^{-psT} \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-pkT} + \sum_{k=1}^s x(-kT) \cdot e^{pkT} \right]. \end{aligned}$$

Оскільки функція-оригінал $x(-kT) = 0$ (для від'ємних значень аргументу),
то

$$D\{x((m-s)T)\} = e^{-psT} X^*(p) .$$

3. Властивість випередження

Якщо зміщення $x(mT)$ відбувається вліво, то:

$$D\{x((m+s)T)\} = e^{psT} \left[X^*(p) - \sum_{k=0}^{s-1} x(kT) \cdot e^{-pkT} \right] .$$

Довести самостійно.

4. Властивість множення оригіналу на експоненту

Нехай $D\{x(mT)\} = X^*(p)$. Тоді:

$$D\{e^{\lambda mT} x(mT)\} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{\lambda mT} x(mT) \cdot e^{-pmT} = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \cdot e^{-(p-\lambda)mT} = X^*(p-\lambda) .$$

5. Властивість множення оригіналу на степеневу функцію

Нехай $D\{x(mT)\} = X^*(p)$. Визначимо похідну по p для основного співвідношення:

$$\frac{d^k X^*(p)}{dp^k} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-pmT} (-1)^k (mT)^k x(mT).$$

Звідси знаходимо:

$$D\{(mT)^k x(mT)\} = (-1)^k \frac{d^k X^*(p)}{dp^k}.$$

6. Зображення кінцевих сум решіткових функцій

Нехай $D\{x(mT)\} = X^*(p)$. Знайдемо:

$$\begin{aligned} D\left\{\sum_{k=0}^{m-1} x(kT)\right\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{m-1} x(kT) \right] \cdot e^{-pmT} = \\ &= 0 + x(0)e^{-pT} + [x(0) + x(T)] \cdot e^{-2pT} + \dots = x(0) \cdot e^{-pT} [1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots] + \\ &+ x(T) \cdot e^{-2pT} [1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots] + x(2T) \cdot e^{-3pT} [1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots] + \dots = \\ &= \frac{e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \cdot e^{-pT} = \frac{X^*(p)}{e^{-pT} - 1}. \end{aligned}$$

7. Множення зображень

Нехай $D\{x_1(mT)\} = X_1^*(p)$; $D\{x_2(mT)\} = X_2^*(p)$.

Знайдемо добуток

$$\begin{aligned} X_1^*(p) \cdot X_2^*(p) &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-pmT} x_1(mT) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} x_2(kT) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-pmT} \left[\sum_{k=0}^m x_1(kT) \cdot x_2((m-k)T) \right] = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-pmT} \left[\sum_{k=0}^m x_1((m-k)T) \cdot x_2(kT) \right]. \end{aligned}$$

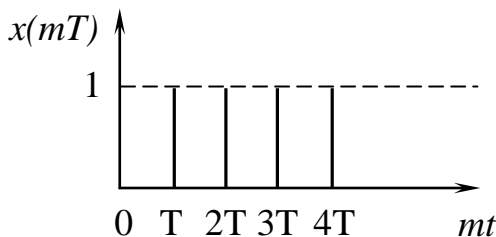
Таким чином:

$$D\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x_1((m-k)T) \cdot x_2(kT)\right\} = X_1^*(p) \cdot X_2^*(p).$$

8. Зображення постійної решіткової функції

Решіткова функція (рис. 14.3) та її зображення:

$$x(mT) = 1$$



$$X^*(p) = D\{1\} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-pmT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1}$$

Рис. 14.3. Решіткова функція

9. Періодичність зображення

$X^*(p) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-pmT} x(mT)$; Підставимо $p = p + j \cdot 2\pi k/T$. Тоді одержимо:

$$X^*\left(p + j \frac{2\pi k}{T}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(p+j2\pi k/T)mT} x(mT) = \left| e^{-j2\pi km} = 1 \right| = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \cdot e^{-pmT} = X^*(p)$$

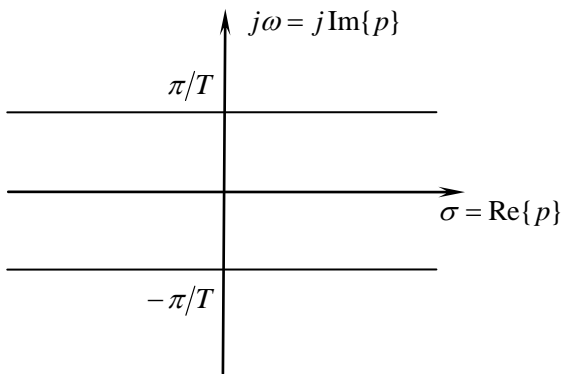


Рис. 14.4.

Таким чином, функція $X^*(p)$ є періодичною з періодом $j2\pi k/T = j\omega k$ уздовж уявної осі (рис. 14.4).

Всі значення функції $X^*(p)$ цілком визначаються в будь-якій смузі шириною $2\pi/T$.

Зміщення незалежної змінної на $\Delta t \in [0, T]$ (зміщена решіткова функція) не змінює формулювань розглянутих властивостей

дискретного перетворення Лапласа. У випадку зміщених функцій Δt варто розглядати як параметр незалежний від m . Якщо $\Delta t < 0$, то замість $x(mT + \Delta t)$ варто розглядати $x((m-1)T + (T + \Delta t))$. У цьому випадку у відповідності з властивістю запізнення для $s=1$:

$$D\{x((m-1)T) + (T + \Delta t)\} = e^{-pT} X^*(p, T + \Delta t)$$

ОБЕРНЕНЕ ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Встановлює зв'язок між зображенням і оригіналом решіткової функції.

$$x(mT) = D^{-1}\{X^*(p)\}; \quad x(mT, \Delta t) = D^{-1}\{X^*(p, \Delta t)\}.$$

Обернене перетворення виконується за формулами, які аналогічні формулам обернення неперервного перетворення Лапласа

$$x(mT) = \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\pi/T}^{c+j\pi/T} X^*(p) \cdot e^{pmT} dp ;$$

$$x(mT, \Delta t) = \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\pi/T}^{c+j\pi/T} X^*(p, \Delta t) \cdot e^{pmT} dp ,$$

де c – довільне додатне постійне число, більше за абсцису збіжності (рис. 14.5).

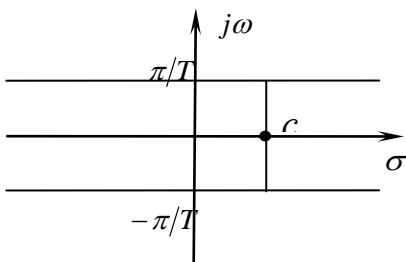


Рис. 14.5.

Для знаходження функції оригіналу застосовують формулу

$$x(mT, \Delta t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[T \cdot X^*(p, \Delta t) \cdot e^{pmT}]_{p=p_k}, \quad \text{де } p_k - k\text{-й полюс функції } X^*(p, \Delta t).$$

При дослідженні імпульсних систем велике поширення одержало так зване z -перетворення, яке оперує зі змінною

$$z = e^{pT}.$$

При цьому шлях інтегрування в площині змінної p перетворюється на коло радіуса e^c в площині змінної z , а ліва півплощина $\operatorname{Re}\{p\} = c < \sigma_0$ - у внутрішність кола (рис. 14.6).

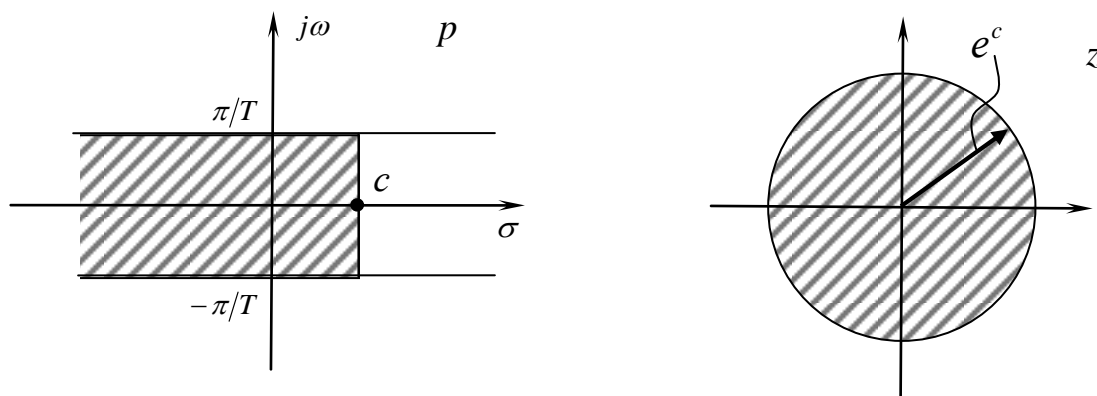


Рис. 14.6.

Відповідно до теореми про лишки можна записати:

- для простих полюсів

$$x(mT) = \sum_{k=1}^n \frac{B^*(z_k)}{A^{*'}(z_k)} z_k^{m-1}, \quad m \geq 1;$$

- для кратних полюсів

$$x(mT) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(s_k - 1)!} \cdot \frac{d^{s_k-1}}{dz^{s_k-1}} \left[(z - z_k)^{s_k} \frac{B^*(z)}{A^*(z)} z^{m-1} \right]_{z=z_k}, \quad m \geq 1,$$

$$\text{де } X^*(z) = \frac{B^*(z)}{A^*(z)}; \quad A^{*'} = \frac{dA^*(z)}{dz}; \quad z_k - \text{полюса функції } X^*(z), \quad s_k -$$

кратність k -го полюса.

Лекція 15. Розв'язок різницевого рівняння. Зв'язок між неперервним та дискретним перетвореннями Лапласа. Властивості дискретного перетворення Лапласа. Обернене дискретне перетворення Лапласа. Обернене перетворення для зміщених функцій. Імпульсний елемент і його рівняння

РОЗВ'ЯЗАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Різнцеве рівняння в загальному випадку можна записати у вигляді:

$$a_n x((m+n)T) + a_{n-1} x((m+n-1)T) + \dots + a_1 x((m+1)T) + a_0 x(mT) = b_v g((m+v)T) + b_{v-1} g((m+v-1)T) + \dots + b_1 g((m+1)T) + b_0 g(mT).$$

Застосуємо до лівої і правої частин різницевого рівняння D – перетворення і скористаємося властивостями лінійності і зміщення (при нульових початкових умовах $x(0) = x(T) = x(2T) = \dots = x((m-1)T) = 0$):

$$X^*(p)[a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_1 e^{pT} + a_0] = G^*(p)[b_v e^{pvT} + b_{v-1} e^{p(v-1)T} + \dots + b_0]$$

Зробимо заміну $e^{pT} = z$ та розв'яжемо рівняння відносно $X^*(z)$:

$$X^*(z) = \frac{b_v z^v + b_{v-1} z^{v-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \cdot G^*(p).$$

Функцію-оригінал $x(mT)$ знаходимо за допомогою формули лишків.

Приклад. Розв'язати різницеве рівняння $i((m+1)T - a_0 i(mT)) = b_0$.

Нехай $I^*(p) = D\{i(mT)\}$; початкові умови нульові $i(0) = 0$. Застосуємо D – перетворення до лівої і правої частин рівняння

$$D\{i((m+1)T) - a_0 i(mT)\} = D\{b_0\}.$$

Використовуючи властивості лінійності і зміщення, одержуємо:

$$e^{pT} I^*(p) - a_0 I^*(p) = b_0 \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1},$$

знаходимо $I^*(p)$:

$$I^*(p) = \frac{b_0 e^{pT}}{(e^{pT} - a_0)(e^{pT} - 1)}.$$

Робимо заміну $e^{pT} = z$:

$$I^*(p) = \frac{b_0 z}{(z - a_0)(z - 1)}.$$

Полюса функції $I^*(p)$ $z_1 = a_0$; $z_2 = 1$. За формулою лишків знаходимо:

$$i(mT) = \frac{b_0}{1 - a_0} - \frac{b_0}{1 - a_0} a_0^m.$$

ЗВ'ЯЗОК МІЖ НЕПЕРЕРВНИМ І ДИСКРЕТНИМ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ ЛАПЛАСА

Нехай є періодична послідовність δ - імпульсів (рис. 15.1):

$$\delta_T(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - mT - \Delta t), \Delta t > 0.$$

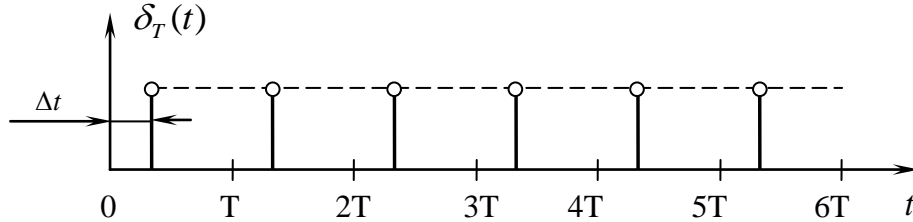


Рис. 15.1.

Знайдемо зображення промодульованої імпульсної послідовності:

$$x^*(t) = x(t) \cdot \delta_T(t),$$

де $x(t)$ - вхідний (модулюючий) сигнал.

$$\text{Нехай } X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt;$$

$$\text{тоді } L\{x^*(t)\} = L\{x(t) \cdot \delta_T(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{m=0}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - mT - \Delta t) dt.$$

З урахуванням того, що $x(t) \cdot \delta(t - mT - \Delta t) = x(mT + \Delta t) \cdot \delta(t - mT - \Delta t)$ та помінявши порядок інтегрування і додавання, одержимо:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT + \Delta t) \int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t - mT - \Delta t) dt &= \sum_{m=0}^{\infty} x(mT + \Delta t) \cdot e^{-p(mT + \Delta t)} \int_0^{\infty} \delta(t - mT - \Delta t) dt = \\ &= e^{-p\Delta t} X^*(p, \Delta t), \end{aligned} \quad (15.1)$$

так як останній інтеграл дорівнює 1.

Знайдемо розкладання в ряд Фур'є періодичної послідовності $\delta_T(t)$:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t - \Delta t) \cdot e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} e^{-jk\omega \Delta t};$$

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega(t - \Delta t)}.$$

Підставимо $\delta_T(t)$ у вигляді ряду Фур'є до виразу для промодульованої імпульсної послідовності і знайдемо зображення по Лапласу

$$L\{x^*(t)\} = L\left\{\frac{1}{T} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega(t - \Delta t)}\right\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega \Delta t} L\{x(t) \cdot e^{jk\omega t}\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega \Delta t} X(p - jk\omega)$$

Порівнюючи отриманий вираз зі співвідношенням (15.1), можна записати

$$e^{-p\Delta t} X^*(p, \Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega\Delta t} X(p - jk\omega)$$

або

$$X^*(p, \Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(p-jk\omega)\Delta t} X(p - jk\omega).$$

Цей вираз встановлює зв'язок між неперервним $X(p)$ та дискретним $X^*(p, \Delta t)$ зображеннями Лапласа. Перетворення, що дозволяє визначати $X^*(p, \Delta t)$ по відомому $X(p)$, називають \bar{D} -перетворенням:

$$X^*(p, \Delta t) = \bar{D}\{X(p)\}.$$

Для незміщених функцій ($\Delta t = 0$):

$$X^*(p) = \frac{x(0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(p - jk\omega).$$

ВЛАСТИВОСТІ \bar{D} - ПЕРЕТВОРЕННЯ

1. Лінійність

Нехай існує $X_i^*(p, \Delta t) = \bar{D}\{X_i(p)\}$. Тоді $\bar{D}\left\{\sum_{i=1}^n a_i X_i(p)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{D}\{X_i(p)\}$.

2. Множення на e^{spT} (s - ціле число)

Нехай $X^*(p, \Delta t) = \bar{D}\{X(p)\}$. Тоді:

$$\begin{aligned} \bar{D}\{X(p) e^{psT}\} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(p-jk\omega)\Delta t} X(p - jk\omega) \cdot e^{s(p-jk\omega)T} = \left| e^{-jk\omega sT} = 1 \right| = \\ &= e^{spT} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(p-jk\omega)\Delta t} X(p - jk\omega) = e^{spT} X^*(p, \Delta t) \end{aligned}$$

3. Множення на дискретне зображення

Нехай $X_1^*(p, \Delta t) = \bar{D}\{X_1(p)\}$. Знайдемо добуток:

$$\begin{aligned} \bar{D}\{X_1(p) \cdot X_2^*(p, \Delta t)\} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(p-jk\omega)\Delta t} X_1(p - jk\omega) \cdot X_2^*(p - jk\omega) \Delta t = \\ &= \left| X_2^*(p - jk\omega) \Delta t = X_2^*(p, \Delta t) \right. - \text{властивість періодичності дискретного зображення} \\ &= X_2^*(p, \Delta t) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(p-jk\omega)\Delta t} X_1(p - jk\omega) = X_1^*(p, \Delta t) \cdot X_2^*(p, \Delta t). \end{aligned}$$

4. Множення на $e^{-p\tau}$, $0 \leq \tau \leq T$

Нехай $\Delta t > \tau$, тоді:

$$\begin{aligned}\bar{D}\{e^{-p\tau} X(p)\} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(p-jk\omega)\tau} e^{(p-jk\omega)\Delta t} X(p-jk\omega) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(p-jk\omega)(\Delta t-\tau)} X(p-jk\omega) = X^*(p, \Delta t - \tau)\end{aligned}$$

Нехай $\Delta t < \tau$, тоді:

$$\begin{aligned}\bar{D}\{e^{-p\tau} X(p)\} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(p-jk\omega)(T+\Delta t-\tau)} [e^{-pT} X(p-jk\omega)] = \\ &= e^{-pT} X^*(p, T + \Delta t - \tau)\end{aligned}$$

5. Визначення $X^*(p, \Delta t)$ за полюсами $X(p)$

Розглянемо формулу оберненого перетворення Лапласа:

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(q) e^{qt} dq.$$

Підставимо $t = mT + \Delta t$, помножимо ліву і праву частини на e^{-pmT} та підсумуємо по m від 0 до ∞ :

$$\sum_{m=0}^{\infty} x(mT + \Delta t) \cdot e^{-pmT} = X^*(p, \Delta t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(p-q)mT} X(q) \cdot e^{q\Delta t} dq.$$

З урахуванням $\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(p-q)mT} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{qT}}$ будемо мати:

$$X^*(p, \Delta t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pT} \cdot e^{q\Delta t}}{e^{pT} - e^{qT}} X(q) dq.$$

Останній інтеграл можна обчислити, використовуючи формулу лишків.
Тоді:

$$X^*(p, \Delta t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left[X(q) \cdot \frac{\ell^{pT} \cdot \ell^{q\Delta t}}{\ell^{pT} - \ell^{qT}} \right]_{q=p_k}.$$

ОБЕРНЕНЕ \bar{D} - ПЕРЕТВОРЕННЯ

Відповідно до формули оберненого D – перетворення можна записати

$$x(mT) = \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\pi/T}^{c+j\pi/T} X^*(p) \cdot e^{pmT} dp \quad (5)$$

У формулі прямого перетворення Лапласа:

$$X(q) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-qt} dt$$

зробимо заміну $t = mT$:

$$X(q) = \int_0^{\infty} e^{-qmT} x(mT) d(mT)$$

та підставимо в цей вираз співвідношення (5):

$$\begin{aligned} X(q) &= \int_0^{\infty} \ell^{-qmT} \left[\frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\pi/T}^{c+j\pi/T} X^*(p) \cdot \ell^{pmT} dp \right] d(mT) = \\ &= \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\pi/T}^{c+j\pi/T} X^*(p) \left[\int_0^{\infty} \ell^{mT(p-q)} d(mT) \right] dp = |q > p| = \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\pi/T}^{c+j\pi/T} X^*(p) \frac{1}{q-p} dp \end{aligned}$$

Даний інтервал може бути обчислений за допомогою формули лишків:

$$X(q) = T \sum_{k=1}^n \text{Res} \left[X^*(p) \frac{1}{q-p}, p_k \right].$$

Скорочений запис оберненого \bar{D} -перетворення має вигляд:

$$X(q) = \bar{D}^{-1} \{ X^*(q, \Delta t) \}.$$

ОБЕРНЕНЕ \bar{D} -ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ЗМІЩЕНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо формулу прямого \bar{D} -перетворення:

$$X^*(p, \Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(p-jk\omega)\Delta t} X(p-jk\omega).$$

Домножимо обидві частини на $e^{-p\Delta t}$ та проінтегруємо по Δt від 0 до T .

$$\int_0^T X^*(p, \Delta t) \cdot e^{-p\Delta t} d(\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T e^{-jk\omega\Delta t} X(p-jk\omega) d(\Delta t)$$

Так як $X(p-jk\omega)$ від Δt не залежить, то

$$\int_0^T X^*(p, \Delta t) \cdot e^{-p\Delta t} d(\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(p-jk\omega) \int_0^T e^{-jk\omega\Delta t} d(\Delta t)$$

З урахуванням значення інтегралу $\int_0^T e^{-jk\omega\Delta t} d(\Delta t) = \begin{cases} T, k=0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$ одержимо:

$$X(p) = \int_0^T X^*(p, \Delta t) \cdot e^{-p\Delta t} d(\Delta t).$$

ІМПУЛЬСНИЙ ЕЛЕМЕНТ І ЙОГО РІВНЯННЯ

Імпульсний елемент – це пристрій, який реагує на дискретні рівновіддалені один від одного значення неперервного вхідного сигналу $x(t)$ при $t = mT$ (рис. 15.2). Його вихідна величина є послідовністю імпульсів означеної форми, амплітуда яких пропорційна дискретним значенням вихідної величини $x(mT)$.

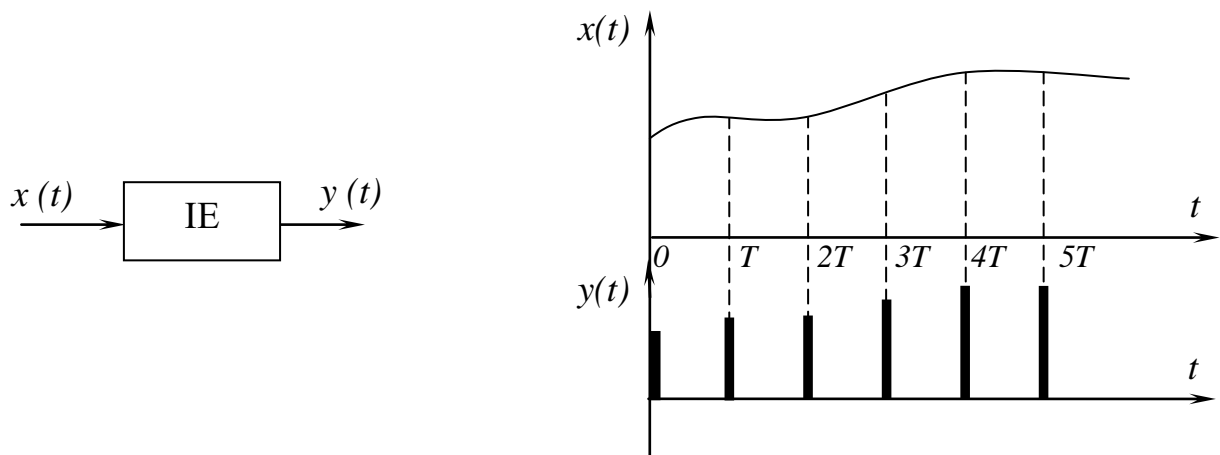


Рис. 15.2.

Найпростішим (ідеальним) імпульсним елементом будемо називати такий елемент, вихідна величина якого $X^*(t)$ являє собою послідовність δ -імпульсів, амплітуди яких дорівнюють дискретним значенням $x(mT)$. Найпростіший імпульсний елемент можна розглядати як модулятор δ -функцій.

Немодульовану періодичну послідовність δ -імпульсів можна зобразити у вигляді

$$\delta_T(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - mT)$$

Тоді для модульованої послідовності δ -імпульсів буде справедливий вираз

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) .$$

Таким чином, модуляцію можна розглядати як множення вхідної величини $x(t)$ (обвідної) на немодульовану послідовність $\delta_T(t)$ (рис. 15.3).

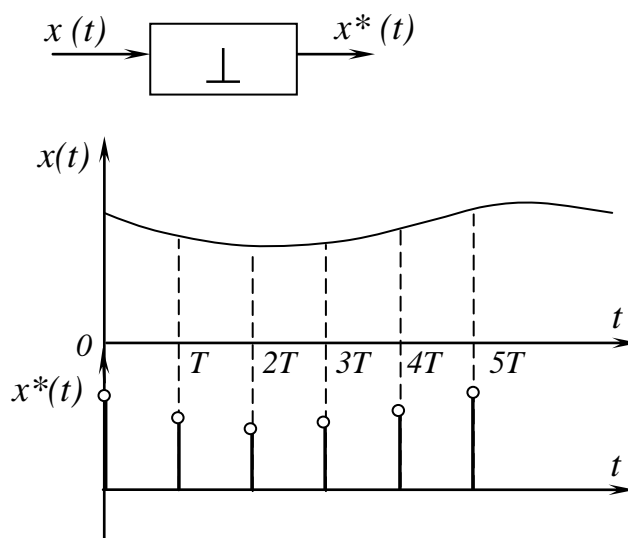


Рис. 15.3.

Очевидно, що будь-який імпульсний елемент з довільною формою імпульсу $s(t)$ завжди може бути зображений у вигляді послідовного з'єднання найпростішого імпульсного елемента і деякої формуючої ланки, реакція якої на δ -імпульс дорівнює $s(t)$ (рис. 15.4). Ця реакція – часова характеристика формуючої ланки.

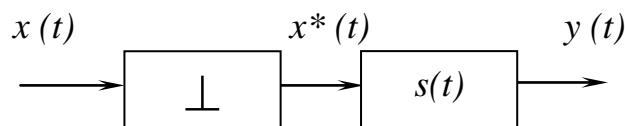


Рис. 15.4.

або в операторній формі (рис. 15.5).

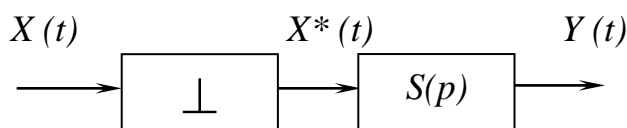
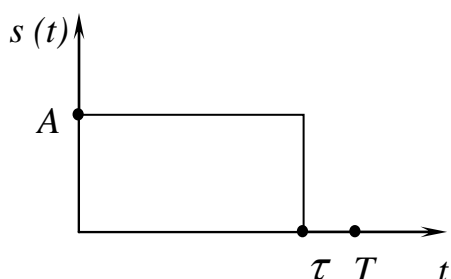


Рис. 15.5.

Для імпульсу прямокутної форми (рис. 15.6):



$$s(t) = \begin{cases} A, 0 \leq t < \tau \\ 0, \tau \leq t < \infty \end{cases}$$

$$S(p) = \int_0^{\tau} e^{-pt} \cdot A dt = A \frac{1 - e^{-p\tau}}{p}$$

Рис. 15.6.

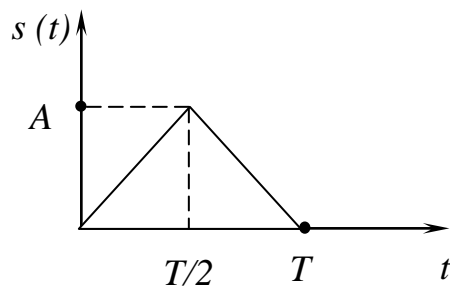


Рис. 15.7.

При $\tau = T$ $S(p) = A \frac{1 - e^{-pT}}{p}$ – фіксатор нульового порядку.

Для імпульсу трикутної форми (рис. 15.7):

$$s(t) = \begin{cases} kt, 0 \leq t < T/2 \\ k(T-t), T/2 \leq t < T \\ 0, T \leq t < \infty \end{cases}$$

$$S(p) = K \frac{(1 - e^{-pT/2})^2}{p^2}, \quad K = 2A/T.$$

Лекція 16. Властивості найпростішого імпульсного елементу. Рівняння розімкнених імпульсних систем. Рівняння замкнених імпульсних систем. Перехідні і сталі процеси в імпульсних системах. Частотні характеристики імпульсних систем

ВЛАСТИВОСТІ НАЙПРОСТІШОГО ІМПУЛЬСНОГО ЕЛЕМЕНТА

Розглянемо найпростіший (ідеальний) імпульсний елемент (рис. 16.1).

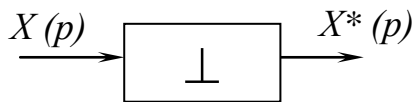


Рис. 16.1. Найпростіший (ідеальний) імпульсний елемент

Зв'язок між зображеннями вхідного і вихідного сигналів дає \bar{D} - перетворення. За умови що $\Delta t = 0$ і $x(0) = 0$

$$X^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(p - jk\omega_0), \text{ де } \omega_0 = 2\pi/T - \text{частота квантування імпульсного елемента.}$$

Підставивши $p = j\omega$, одержуємо зв'язок між спектрами вхідного і вихідного сигналів:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_0)],$$

де $X(\omega) = |X(j\omega)|$ – спектр неперервного вхідного сигналу; $X^*(\omega) = |X^*(j\omega)|$ – спектр вихідного сигналу (дискретизованого за часом найпростішим імпульсним елементом).

У загальному випадку спектр вихідного сигналу (рис. 16.2):

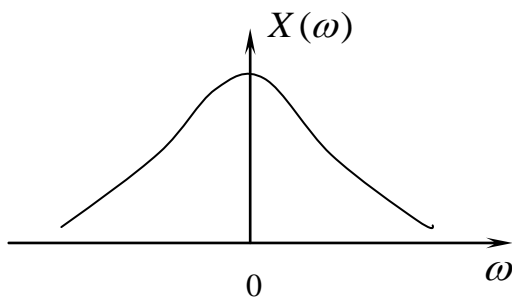


Рис. 16.2.

$$X(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)},$$

де $U(\omega), V(\omega)$ – дійсна і уявна частина $X(j\omega)$. Аналогічне співвідношення можна записати і для дискретизованого сигналу:

$$X^*(\omega) = \sqrt{U^{*2}_{(\omega)} + V^{*2}_{(\omega)}}, \text{ причому}$$

$$U^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(\omega - k\omega_0);$$

$$V^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} V(\omega - k\omega_0).$$

Тоді спектр вихідного сигналу визначається сумою зміщених спектрів вхідного сигналу (рис. 16.3).

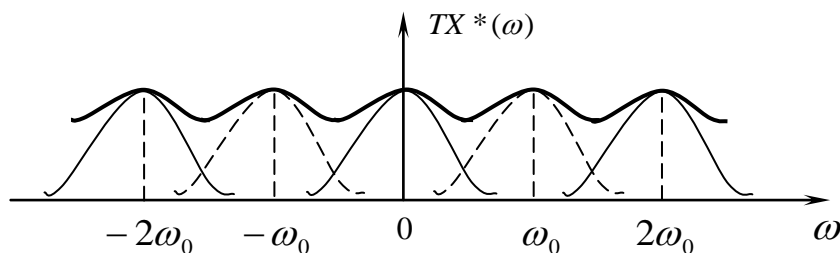


Рис. 16.3. Спектр вихідного сигналу як сума зміщених спектрів вхідного сигналу

Як видно з наведеного рисунку, спектр $X^*(\omega)$ істотно відрізняється від спектра $X(\omega)$, тобто в загальному випадку квантування за часом призводить до спотворення вхідного сигналу. З'ясуємо за яких умов квантування за часом не призводить до втрати інформації.

Розглянемо сигнал з обмеженим (фінітним спектром) (рис. 16.4).

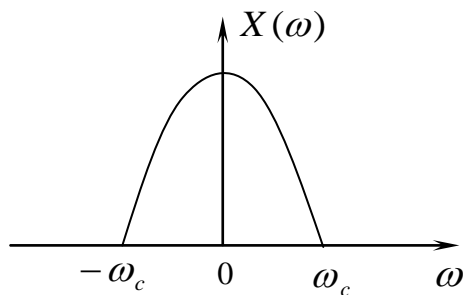


Рис. 16.4. Сигнал з обмеженим спектром (ω_s – частота зрізу)

Для сигналів з обмеженим спектром можливі три випадки:

1) $\omega_0 < 2\omega_s$ (рис. 16.5)

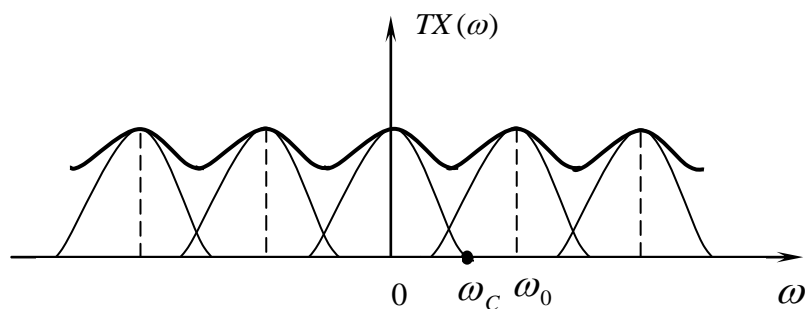


Рис. 16.5.

Відбувається накладення зміщених спектрів $X(j(\omega - k\omega_0))$, в результаті чого спектр вихідного (дискретизованого) сигналу $X^*(\omega)$ буде відрізнятися від спектра вхідного сигналу $X(\omega)$.

2) $\omega_0 = 2\omega_s$ (рис. 16.6)

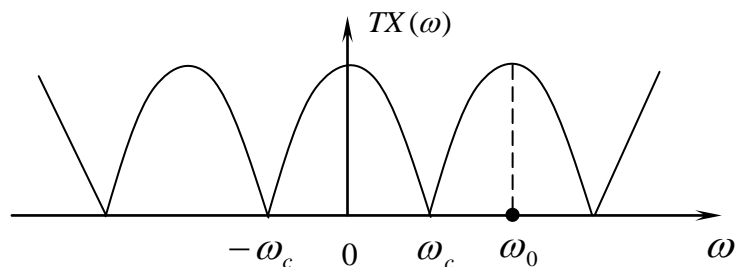


Рис. 16.6.

3) $\omega_0 > 2\omega_c$ (рис. 16.7)

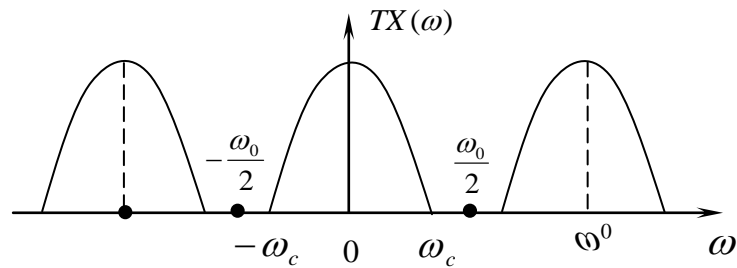


Рис. 16.7.

Як видно з рисунків при $\omega_0 \geq 2\omega_c$ накладання зміщених спектрів відсутнє і в діапазоні частот $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$ спектри сигналів $X(\omega)$ і $X^*(\omega)$ збігаються за формою і розрізняються лише масштабом.

Як відомо, реальний імпульсний елемент можна представити у вигляді з'єднання ідеального імпульсного елемента та формувача з передаточною функцією $S(p)$ (рис. 16.8).

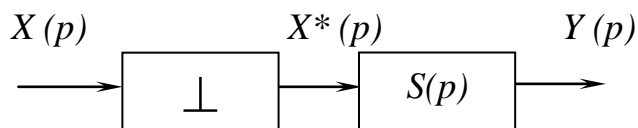
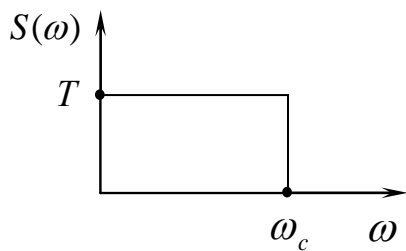


Рис. 16.8.

Спектр вихідного сигналу: $Y(\omega) = S(\omega) \cdot X^*(\omega)$.

Нехай функція $S(\omega)$ представляє частотну характеристику ідеального фільтра (рис. 43):



$$S(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}; \quad T = 2\pi/\omega_0$$

Очевидно, що для $|\omega| < \omega_c$ має місце:
 $Y(j\omega) = T \cdot X^*(j\omega)$.

Рис. 16.9. Частотна характеристика ідеального фільтра

Для переходу в часову область скористаємося оберненим перетворенням Фур'є:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} X^*(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

Представимо $X^*(j\omega)$ у вигляді:

$$X^*(j\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \cdot e^{-j\omega mT}.$$

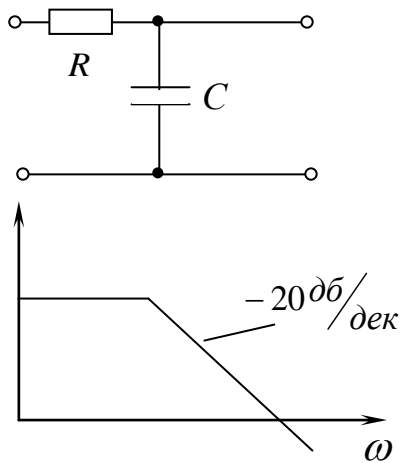
Тоді:

$$y(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \cdot e^{j\omega(t-mT)} d\omega = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \frac{2 \sin \omega_c(t-mT)}{\omega_0(t-mT)}.$$

З отриманого виразу випливає, яким чином може бути відновлений початковий сигнал.

Теорема Котельникова: для сигналів з обмеженим (фінітним) спектром квантування з частотою $\omega_0 \geq 2\omega_c$ не призводить до втрати інформації.

Для відновлення сигналу після дискретизації необхідно використовувати пристрій, який має характеристику ідеального фільтру (рис. 16.10).



Аперіодична ланка першого порядку має частотну характеристику вигляду, що зображений на рисунку. Для одержання характеристики близької до характеристики ідеального фільтру необхідно використовувати послідовне з'єднання достатньо великої кількості найпростіших ланок.

Рис. 16.10. Ідеальний фільтр та його характеристика

РІВНЯННЯ РОЗІМКНЕНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Розімкнена імпульсна система може бути зображена у вигляді послідовного з'єднання найпростішого імпульсного елемента, формуючого елемента та неперервної частини системи (рис. 16.11).

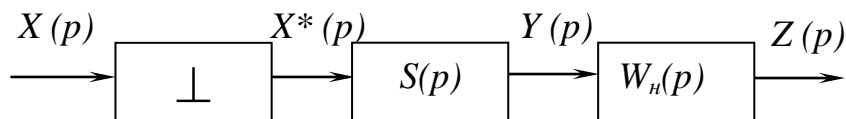


Рис. 16.11. Розімкнена імпульсна система

Для зручності аналізу системи формуючий елемент і неперервна частина поєднуються разом і називаються зведеною неперервною частиною системи (ЗНЧ).

$$W_{ЗНЧ}(p) = S(p) \cdot W_n(p),$$

де $W_{знч}(p)$ – передаточна функція зведеної неперервної частини. Зображення вихідного сигналу

$$Z(p) = W_H(p) \cdot S(p) \cdot X^*(p) .$$

Для знаходження дискретного зображення застосуємо до лівої і правої частин рівняння \bar{D} - перетворення:

$$\bar{D}\{Z(p)\} = Z^*(p, \Delta t) = \bar{D}\{W_H(p) \cdot S(p) \cdot X^*(p)\} = \bar{D}\{W_H(p) \cdot S(p)\} X^*(p) .$$

Передаточною функцією розімкненої імпульсної системи називають вираз (рис. 16.12):

$$W^*(p, \Delta t) = \frac{Z^*(p, \Delta t)}{X^*(p)} = \bar{D}\{W_H(p) \cdot S(p)\} .$$

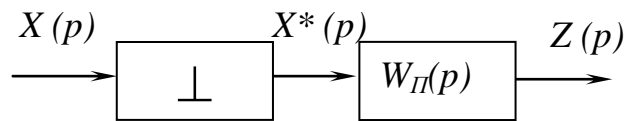


Рис. 16.12.

РІВНЯННЯ ЗАМКНЕНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Нехай еквівалентна схема замкненої імпульсної системи має вигляд (рис. 16.13).

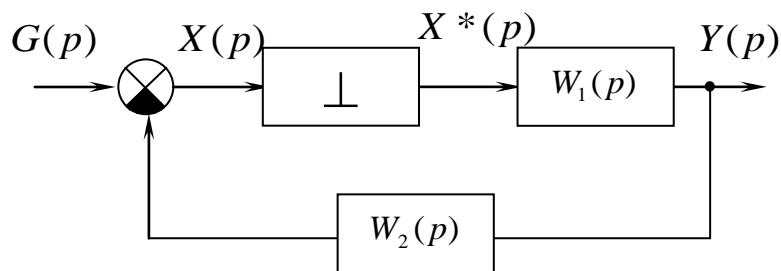


Рис. 16.13. Еквівалентна схема замкненої імпульсної системи

Система рівнянь, що описує процеси в даній системі:

$$\begin{cases} X(p) = G(p) - W_2(p) \cdot Y(p) ; \\ Y(p) = W_1(p) \cdot X^*(p) ; \end{cases}$$

Підставимо друге рівняння системи у перше:

$$X(p) = G(p) - W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot X^*(p) .$$

Застосуємо \bar{D} - перетворення до лівої і правої частин цього виразу при $\Delta t = 0$.

$$\bar{D}\{X(p)\} = \bar{D}\{G(p) - W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot X^*(p)\} = \bar{D}\{G(p)\} - \bar{D}\{W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot X^*(p)\}$$

або

$$X^*(p) = G^*(p) - \bar{D}\{W_1(p) \cdot W_2(p)\} X^*(p) .$$

$$\text{Тоді: } X^*(p) = \frac{G^*(p)}{1 + \overline{D}\{W_1(p) \cdot W_2(p)\}_{\Delta t=0}}.$$

Застосуємо \overline{D} - перетворення до другого рівняння системи при $\Delta t \neq 0$

$$\overline{D}\{Y(p)\} = Y^*(p, \Delta t) = \overline{D}\{W_1(p)\} X^*(p).$$

Для передаточної функції замкненої імпульсної системи буде мати місце вираз

$$W^*(p, \Delta t) = \frac{Y^*(p, \Delta t)}{G^*(p)} = \frac{\overline{D}\{W_1(p)\}}{1 + \overline{D}\{W_1(p) \cdot W_2(p)\}_{\Delta t=0}}. \quad (16.1)$$

У замкненій імпульсній системі сигнал на вході імпульсного елемента визначається різницею між задавальним впливом і вихідною величиною системи

$$X(p) = G(p) - W_2(p) \cdot Y(p)$$

Тому параметри імпульсів, що впливають на неперервну частину системи, визначаються не тільки дискретними значеннями задавального впливу (як в розімкненій імпульсній системі), але залежать і від вихідної величини системи. Якщо зведена неперервна частина системи малоінерційна і її імпульсна перехідна характеристика в початковий момент часу не дорівнює нулю:

$$w_p(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pW_p(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} pW_1(p) \cdot W_2(p) \neq 0,$$

керована величина системи зазнає стрибків в моменти надходження імпульсів з виходу найпростішого імпульсного елемента. При цьому сигнал неузгодженості системи $x(mT)$ також зазнає стрибків навіть при неперервному задавальному впливі (рис. 16.14).

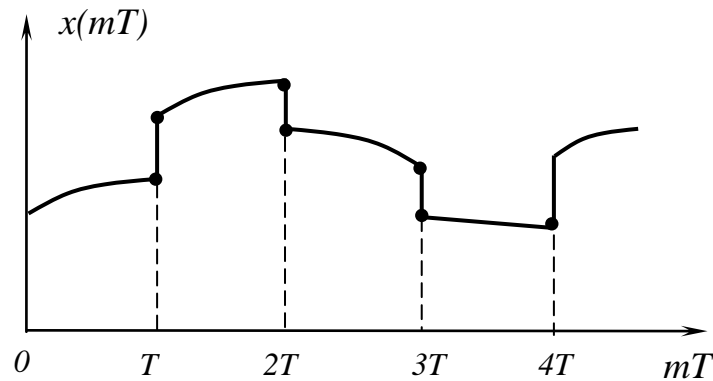


Рис. 16.14.

У реальних фізичних системах імпульсний елемент фіксує значення вхідного сигналу зліва від моментів квантування $x(mT - 0)$. З урахуванням цього передаточна функція замкненої імпульсної системи здобуває вигляду:

$$W^*(p, \Delta t) = \frac{Y(p, \Delta t)}{G^*(p, -0)} = \frac{\overline{D}\{W_1(p)\}}{1 + \overline{D}\{W_1(p) \cdot W_2(p)\}_{\Delta t=-0}}.$$

Відповідно до теореми зсуву для $\Delta t < 0$, одержимо

$$\bar{D} = \{W_1(p) \cdot W_2(p)\}_{\Delta t=0} = e^{-pT} \bar{D} \{W_1(p) \cdot W_2(p)\}_{\Delta t=T}.$$

Тоді остаточно можна записати:

$$W^*(p, \Delta t) = \frac{\bar{D}\{W_1(p)\}}{1 + e^{-pT} \bar{D}\{W_1(p) \cdot W_2(p)\}_{\Delta t=T}}. \quad (16.2)$$

Відмінність між формулами (16.1) і (16.2) істотна, якщо степінь знаменника передаточної функції неперервної частини розімкненої системи $W_p(p)$ дорівнює або лише на одиницю більше степеня чисельника, що призводить до появи розривів у моменти часу $t = mT$ в сигналі $x(mT)$.

Приклад. Визначити передаточну функцію замкненої імпульсної системи (рис. 16.15).

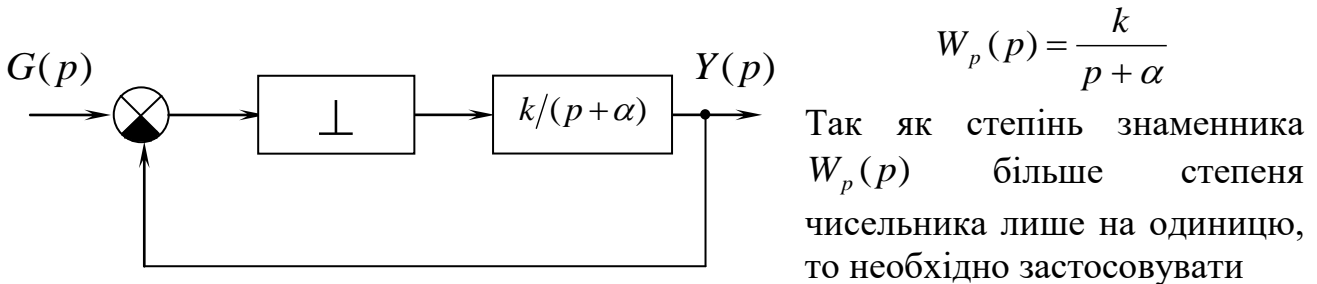


Рис. 16.15.
формулу (16.2):

$$W^*(p, \Delta t) = \frac{\bar{D}\{W_p(p)\}}{1 + e^{-pT} \bar{D}\{W_p(p)\}_{\Delta t=T}}.$$

$$\bar{D}\{W_p(p)\} = \bar{D}\left\{\frac{k}{p+\alpha}\right\} = \text{Res} \left[\frac{k}{p+\alpha} \cdot \frac{e^{pT} e^{q\Delta t}}{e^{pT} - e^{qT}} \right]_{q=-\alpha} = k \frac{e^{pT} e^{-\alpha\Delta t}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}}.$$

$$\bar{D}\{W_p(p)\}_{\Delta t=T} = k \frac{e^{pT} e^{-\alpha T}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}};$$

$$W^*(p, \Delta t) = \frac{k \frac{e^{pT} e^{-\alpha\Delta t}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}}}{1 + e^{-pT} \frac{k \cdot e^{pT} e^{-\alpha T}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}}} = \frac{k \cdot e^{pT} e^{-\alpha\Delta t}}{e^{pT} + (k-1)e^{-\alpha T}}.$$

ПЕРЕХІДНІ І УСТАЛЕНІ ПРОЦЕСИ В ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМАХ

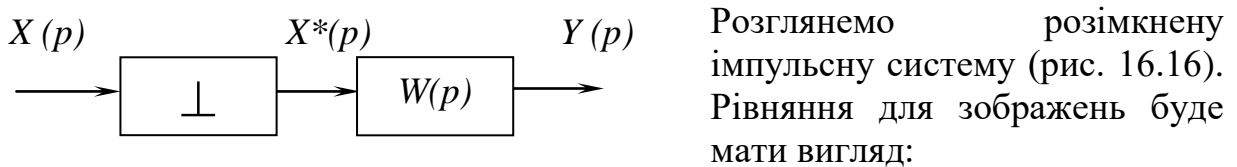


Рис. 16.16.

$$Y^*(p, \Delta t) = W^*(p, \Delta t) \cdot X^*(p),$$

де $Y^*(p, \Delta t) = D\{x(mT + \Delta t)\}; W^*(p, \Delta t) = D\{w(mT + \Delta t)\};$
 $X^*(p) = D\{x(mT)\}.$

Скористаємося властивістю множення зображень (згортка оригіналів):

$$y(mT + \Delta t) = \sum_{k=0}^m w((m-k)T + \Delta t) \cdot x(kT) = \sum_{k=0}^m w(kT + \Delta t) x((m-k)T).$$

Функцію $w(kT + \Delta t)$ називають імпульсною (ваговою) характеристикою імпульсної системи. Функція $y(mT + \Delta t)$ описує перехідний процес.

Якщо зовнішній вплив δ – імпульс, тобто
$$x(mT) = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 0, & m > 0; \end{cases}$$

то тоді

$$y(mT + \Delta t) = \sum_{k=0}^m w((m-k)T + \Delta t) \cdot x(kT) = w(mT + \Delta t).$$

Таким чином, реакція імпульсної системи на імпульсний решітчастий вплив визначається імпульсною (ваговою) решітчастою характеристикою $w(mT + \Delta t).$

Якщо зовнішній вплив прикладається в довільний момент часу $t = m_1T$, то перехідний процес визначається відповідно до виразу:

$$y(mT + \Delta t) = \sum_{k=m_1}^m w((m-k)T + \Delta t) \cdot x(kT).$$

Вираз для сталого (вимушеного) процесу можна одержати, підставивши $m_1 = -\infty$ (це відповідає тому, що до моменту спостереження пройшов нескінченно великий час):

$$y_{ycm}(mT + \Delta t) = \sum_{k=-\infty}^m w((m-k)T + \Delta t) \cdot x(kT).$$

Зробимо заміну $k = m - k$. Тоді одержимо:

$$y_{ycm}(mT + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT + \Delta t) \cdot x((m-k)T).$$

Різниця між перехідним і сталим процесом визначає вільний процес:

$$y_{св}(mT + \Delta t) = y(mT + \Delta t) - y_{ycm}(mT + \Delta t) = \sum_{k=0}^m w(kT + \Delta t) \cdot x((m-k)T) - \sum_{k=0}^{\infty} w(kT + \Delta t) \cdot x((m-k)T) = - \sum_{k=m+1}^{\infty} w(kT + \Delta t) \cdot x((m-k)T).$$

ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Частотні характеристики імпульсних систем визначаються аналогічно звичайній лінійній системі. АФЧХ може бути отримана з передаточної функції заміною $p \rightarrow j\omega$

$$W^*(j\omega, \Delta t) = W(p, \Delta t) \Big|_{p=j\omega} = U^*(\omega, \Delta t) + jV^*(\omega, \Delta t) \cdot e^{j\varphi^*(\omega, \Delta t)},$$

де $W^*(j\omega, \Delta t)$ – АФЧХ; $W^*(\omega, \Delta t) = \sqrt{U^*(\omega, \Delta t)^2 + V^*(\omega, \Delta t)^2}$ – АЧХ;
 $\varphi^*(\omega, \Delta t) = \arg W^*(j\omega, \Delta t)$ – ФЧХ.

Розглянемо властивості частотних характеристик імпульсних систем:

1) Відповідно до періодичності передаточної функції $W^*(p, \Delta t)$ АФЧХ також буде періодичною з періодом $j2\pi/T$. Тому вона цілком визначається своїми значеннями в інтервалі частот $-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$.

2) З властивостей дискретного перетворення Фур'є випливає, що

$$\bar{W}^*(-j\omega, \Delta t) = \bar{W}^*(j\omega, \Delta t),$$

де $\bar{W}^*(j\omega, \Delta t)$ – спряжена функція. Тоді $U^*(\omega)$ буде парною функцією ω , а $V^*(\omega)$ – непарною функцією ω . Тому при побудові АФЧХ досить розглядати діапазон $0 \leq \omega \leq \pi/T$.

3) Крім залежності від ω частотні характеристики залежать також і від Δt , тобто при зміні $\Delta t \in [0, T]$ можна одержати сім'ю характеристик для різних значень Δt . Часто обмежуються однією характеристикою $W^*(j\omega)$ при $\Delta t = 0$.

4) У крайніх точках інтервалу $\omega \in [0, \pi/T]$ АФЧХ приймає дійсні значення.

5) При збільшенні частоти квантування $\omega_0 = 2\pi/T$, тобто зменшенні періоду квантування T , частотні характеристики імпульсних систем наближаються до частотних характеристик неперервних систем.

Приклад. Побудувати АФЧХ імпульсної системи (рис. 16.17):

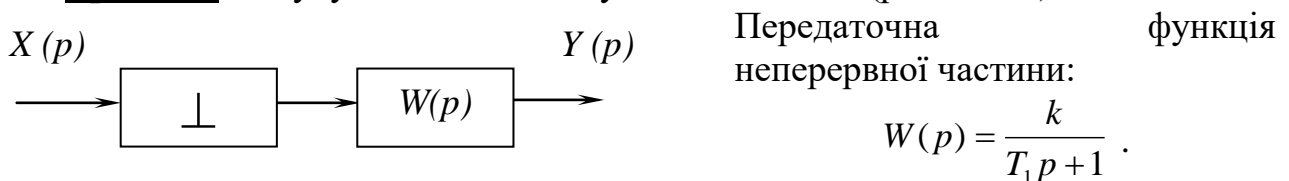


Рис. 16.17.

Знаходимо передаточну функцію імпульсної системи

$$W^*(p, \Delta t) = \bar{D}\{W(p)\} = \sum_{k=1}^1 [\text{Re } sW(q) \frac{e^{pT} e^{q\Delta t}}{e^{pT} - e^{qT}}, q = p_k = -1/T_1] = \frac{k}{T_1} \frac{e^{pT} e^{-\Delta t/T_1}}{e^{pT} - e^{-T/T_1}}.$$

Підставляємо в $W^*(j\omega, \Delta t)$ $p = j\omega$:

$$W^*(j\omega, \Delta t) = \frac{k}{T_1} \frac{e^{j\omega T} e^{-\Delta t/T_1}}{e^{j\omega T} - e^{-T/T_1}}.$$

У крайніх точках при $\omega = 0$ і $\omega = \pi/T$ одержуємо:

$$W^*(j0, \Delta t) = \frac{ke^{-\Delta t/T_1}}{T_1(1 - e^{-T/T_1})};$$

$$W^*(j\pi/T, \Delta t) = \frac{ke^{-\Delta t/T_1}}{T_1(1 + e^{-T/T_1})}.$$

Графік функції $W^*(j\omega, \Delta t)$ має вигляд наведений на рисунку 16.18. Зі зменшенням величини T радіус окружності збільшується (показано пунктиром).

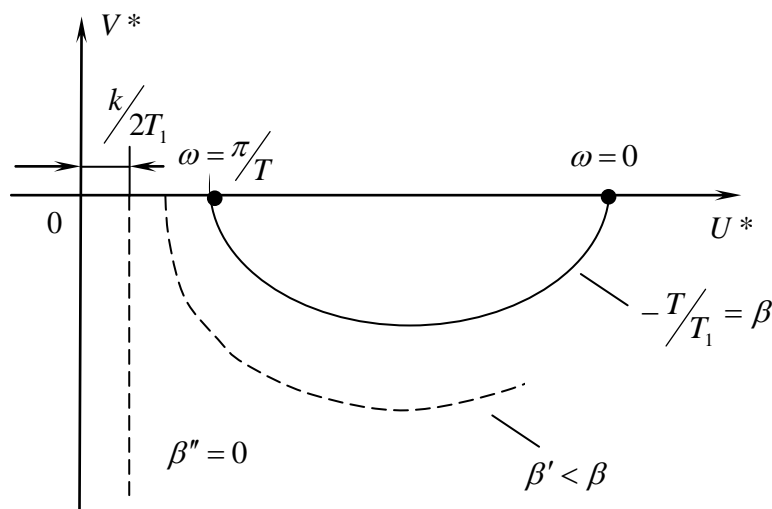


Рис. 16.18. Графік функції $W^*(j\omega, \Delta t)$

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Імпульсна система стійка, якщо її реакція на обмежений зовнішній вплив обмежена (вільний процес у системі загасаючий). Очевидно, що необхідною і достатньою умовою стійкості, як і у випадку неперервних систем, буде вимога до розташування на комплексній площині коренів характеристичного рівняння системи $A^(p) = 0$. Імпульсна система буде стійкою, якщо корені*

характеристичного рівняння (полюса передаточної функції) розташовані у лівій частині основної смуги. Якщо хоча б один полюс має позитивну дійсну частину, то система буде нестійкою (рис. 16.19).

Якщо один з коренів чисто уявний (розташований на вісі), а інші мають від'ємні дійсні корені, то система нейтральна (знаходиться на межі стійкості).

Нехай $W^*(p, \Delta t) = \frac{B^*(p, \Delta t)}{A^*(p)}$

$$A^*(p) = a_n \ell^{pnT} + a_{n-1} \ell^{p(n-1)T} + \dots + a_1 \ell^{pT} + a_0.$$

Перейдемо до Z - перетворення. Характеристичний багаточлен набуває вигляду ($z = e^{pT}$):

$$A^*(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

При цьому основна смуга лівої півплощини переводиться у внутрішність окружності

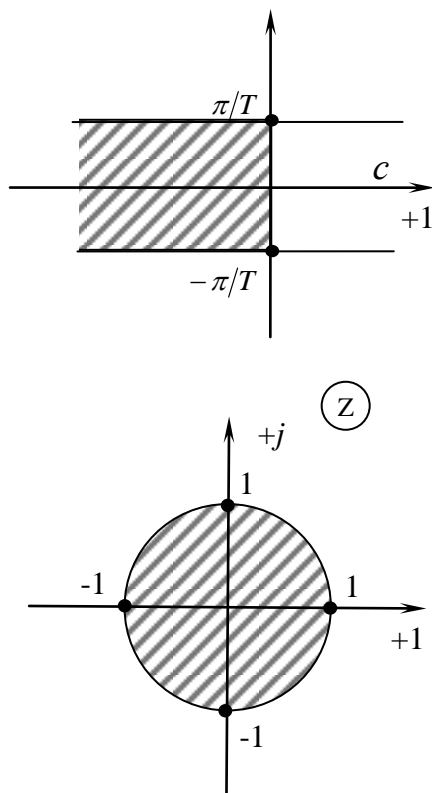


Рис. 16.19

одиничного радіуса, а для стійкості системи корені характеристичного багаточлена повинні розташовуватися усередині цієї окружності, тобто повинна виконуватися умова $|z| < 1$.

Для розімкненої системи стійкість може бути досліджена по передаточній функції зведеної неперервної частини, тому що полюси передаточної функції розімкненої системи $W^*(p)$ збігаються (з точністю до їхньої уявної частини) з полюсами передаточної функції зведеної неперервної частини. Таким чином, якщо зведена неперервна частина стійка, нейтральна або нестійка, то і розімкнена імпульсна система відповідно стійка, нейтральна або нестійка.

Приклад. Дослідити стійкість розімкненої імпульсної системи (рис. 16.20):

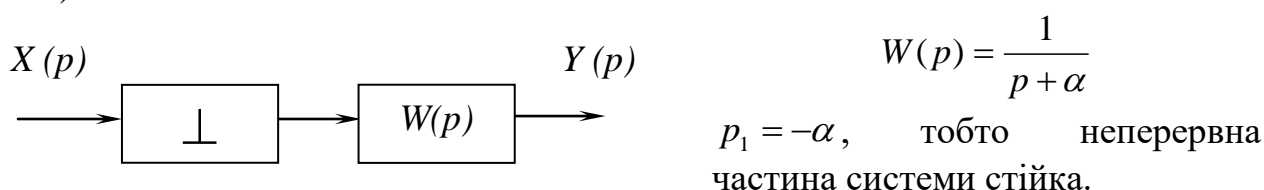


Рис. 16.20.

Знайдемо передаточну функцію розімкненої імпульсної системи:

$$W^*(p, \Delta t) = \operatorname{Re} s \left[\frac{1}{q + \alpha} \frac{e^{pT} e^{q\Delta t}}{e^{pT} - e^{qT}} \right]_{q=-\alpha} = \frac{e^{pT} e^{-\alpha\Delta t}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}}$$

$A^*(p) = e^{pT} - e^{-\alpha T}$. Тоді корінь характеристичного рівняння $A^*(p) = 0$ буде $p = -\alpha$, отже імпульсна система буде стійка.

Тема 2.2. Аналіз стійкості лінійних імпульсних систем

Лекція 17. Дослідження стійкості імпульсних систем. Аналог критерію Гурвіца. Аналог критерію Рауса (теорема Шура)

КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ ГУРВІЦА ДЛЯ ІСАР (аналог критерію Гурвіца)

Нехай відома передаточна функція замкненої імпульсної системи

$$W^*(p, \Delta t) = \frac{B^*(p, \Delta t)}{A^*(p)},$$

де

$$A^*(p) = a_n \ell^{pnT} + a_{n-1} \ell^{p(n-1)T} + \dots + a_1 \ell^{pT} + a_0. \quad (17.1)$$

Після заміни $e^{pT} = z$ одержимо:

$$A^*(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0. \quad (17.2)$$

Критерії стійкості, розроблені стосовно до неперервних систем, є критеріями розташування всіх коренів характеристичного рівняння замкненої системи у лівій півплощині площини коренів. Для характеристичних рівнянь імпульсних систем (17.1) і (17.2) умовою стійкості є розташування всіх коренів відповідно в лівій частині основної смуги (для рівняння 17.1) або усередині кола одиничного радіуса площини коренів z (для рівняння 17.2). Тому, перед тим як скористатися критеріями стійкості неперервних систем для дослідження стійкості імпульсних систем, необхідно виконати відповідне перетворення характеристичного рівняння імпульсної системи. Як відомо з теорії функцій комплексної змінної, за допомогою білінійного перетворення:

$$z = \frac{u+1}{u-1}.$$

Одиничне коло в комплексній площині z відображається в ліву півплощину площини u (рис. 17.1).

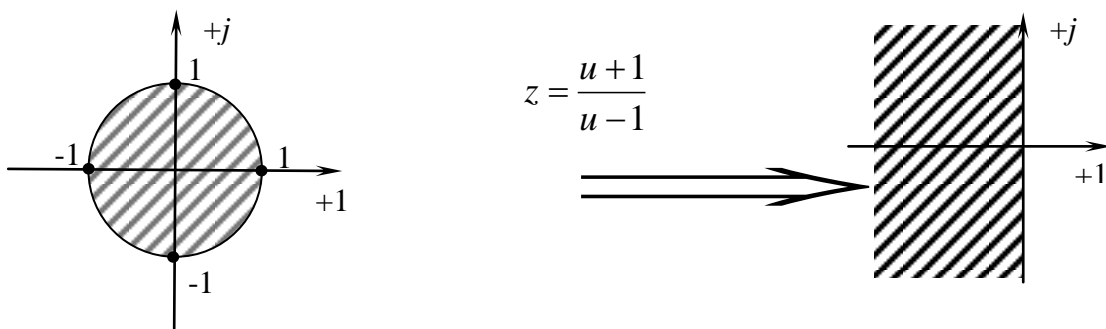


Рис. 17.1.

Таким чином, необхідно зробити заміну $z = (u+1)(u-1)$ в характеристичному рівнянні імпульсної системи $A^*(z) = 0$.

$$A^*\left(\frac{u+1}{u-1}\right) = a_n \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{u+1}{u-1}\right) + a_0.$$

Після приведення до загального знаменника, розкриття дужок і приведення подібних членів одержимо

$$A^*(u) = A_n u^n + A_{n-1} u^{n-1} + \dots + A_1 u + A_0,$$

$$\text{де } A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad A_m = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{l=0}^n \binom{k}{l} \binom{n-k}{m-l} (-1)^l, \quad A_0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k, \quad m = 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$\binom{k}{l} = \frac{k!}{l!(k-l)!} - \text{біноміальні коефіцієнти}; \quad 0! = 1; \quad (0-1)!.$$

До характеристичного багаточлена $A^*(u)$ можна застосувати критерій Гурвіца у його стандартному формулюванні.

Імпульсна система буде стійкою, якщо при $A_n > 0$ всі головні діагональні визначники додатні

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n+3} & \dots & 0 \\ A_n & A_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & A_{n-1} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0 \dots \Delta_{n-1} > 0.$$

Приклад. Дослідити стійкість замкненої імпульсної системи (рис. 17.2).

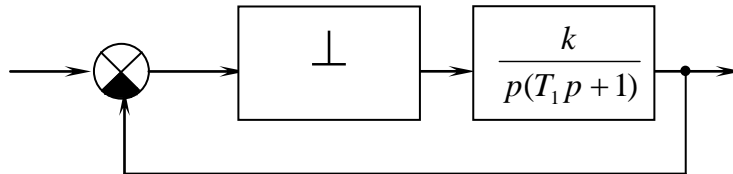


Рис. 17.2.

Знаходимо передаточну функцію замкненої імпульсної системи:

$$W^*(p) = \frac{\bar{D} \left\{ \frac{k}{p(T_1 p + 1)} \right\}}{1 + \bar{D} \left\{ \frac{k}{p(T_1 p + 1)} \right\}};$$

$$\bar{D} \left\{ \frac{k}{p(T_1 p + 1)} \right\} = k \frac{(1 - e^{-T/T_1}) \cdot e^{pT}}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - e^{-T/T_1})}.$$

Тоді передаточна функція замкненої системи може бути записана у вигляді:

$$W^*(p) = \frac{k(1 - e^{-T/T_1}) \cdot e^{pT}}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - e^{-T/T_1}) + k(1 - e^{-T/T_1}) \cdot e^{pT}}.$$

Характеристичний багаточлен (знаменник передаточної функції):

$$A^*(p) = e^{2pT} + e^{pT} [k(1 - e^{-T/T_1}) - 1 - e^{-T/T_1}] + e^{-T/T_1}.$$

Здійснюємо заміну $e^{pT} = z$:

$$A^*(z) = z^2 + [k(1 - e^{-T/T_1}) - 1 - e^{-T/T_1}] \cdot z + e^{-T/T_1} = z^2 + A_z + e^{-T/T_1},$$

де $A = k(1 - e^{-T/T_1}) - 1 - e^{-T/T_1}$.

Робимо підстановку $z = (u + 1)/(u - 1)$:

$$A^*(u) = (u + 1)^2 + A(u + 1)(u - 1) + (u - 1)^2 e^{-T/T_1} = u^2(1 + A + e^{-T/T_1}) + 2u(1 - e^{-T/T_1}) + 1 - A + e^{-T/T_1} = A_2 u^2 + A_1 u + A_0$$

Відповідно до критерію Гурвіца повинні виконуватися умови:

$$A_2 > 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_0 \end{vmatrix} > 0 \quad ; \quad \begin{matrix} A_1 > 0 \\ A_1 A_0 > 0 \end{matrix} ;$$

або $1 + A + e^{-T/T_1} > 0$; $1 - e^{-T/T_1} > 0$; $1 - A + e^{-T/T_1} > 0$.

Друга умова виконується при будь-яких T і T_1 .

Розглянемо першу і третю умови:

$$1 + A - e^{-T/T_1} = 1 + e^{-T/T_1} + k(1 - e^{-T/T_1}) - 1 - e^{-T/T_1} = k(1 - e^{-T/T_1}) > 0$$

Ця умова також виконується при будь-яких k , T , T_1 .

Третя умова:

$$1 - A - e^{-T/T_1} = 2(1 + e^{-T/T_1}) - k(1 - e^{-T/T_1}) > 0, \text{ звідки } k < \frac{2(1 + e^{-T/T_1})}{1 - e^{-T/T_1}}.$$

Таким чином, на відміну від неперервних систем 2-го порядку стійких як у розімкненому, так і в замкненому станах, стійкість замкнених імпульсних систем залежить від коефіцієнта підсилення розімкненої системи.

АНАЛОГ КРИТЕРІЮ РАУСА (теорема Шура)

Замкнена імпульсна система буде стійкою якщо всі нулі характеристичного багаточлена $A^(z)$ розташовані усередині кола одиничного радіуса, тобто якщо всі нулі $A^*(z)$ за модулем менше одиниці.* Для визначення умов, які можна накласти на коефіцієнти багаточлена, щоби система була стійкою, розглянемо багаточлен:

$$A^*(z) + \lambda \cdot A^*\left(\frac{1}{z}\right) \cdot z^n. \quad (17.3)$$

На границі кола $z = e^{j\omega}$. Складемо вираз:

$$|A^*(e^{j\omega})| + \lambda |A^*(e^{-j\omega})e^{j\omega}|.$$

За умови $|\lambda| < 1$ багаточлен буде задовольняти теоремі Руше, відповідно до якої багаточлени $A^*(z)$ і (10) мають однакове число нулів в одиничному колі. Нехай тепер:

$$|a_0| < |a_n|.$$

Тоді, припускаючи у виразі (10) $\lambda = -\frac{a_0}{a_n}$, одержимо:

$$A^*(z) - \frac{a_0}{a_n} A^*\left(\frac{1}{z}\right) \cdot z^n = A_1^*(z) \frac{z^n}{a_n} =$$

$$\frac{z}{a_n} \{ (a_n^2 - a_0^2) z^{n-1} + (a_{n-1}a_n - a_1a_0) z^{n-2} + \dots + (a_1a_n - a_{n-1}a_0) \}.$$

Багаточлен $A_1^*(z)$ має степінь $n-1$. Так як $z=0$ відповідає нулю, який лежить усередині одиничного кола, то щоби $A^*(z)$ мав нулі усередині одиничного кола, необхідно щоби $A_1^*(z)$ мав свої нулі також усередині цього одиничного кола. Таким чином, ми переходимо до теореми Шура: *багаточлен $A^*(z)$ тоді і тільки тоді має нулі усередині одиничного кола, коли $|a_0| < |a_n|$ і багаточлен:*

$$A_1^*(z) = \frac{a_n A^*(z) - a_0 \cdot A^*\left(\frac{1}{z}\right) \cdot z^n}{z}$$

ступеня $n-1$ володіє такою ж властивістю.

Повторюючи цей процес $n-2$ раз, одержуємо багаточлен першого степеня і, отже, визначаємо, чи знаходяться нулі багаточлена $A^*(z)$ усередині одиничного кола.

Зазначеному процесу обчислень можна додати форму, аналогічну таблиці Рауса. У першій парі рядків таблиці виписуються коефіцієнти багаточлена $A^*(z)$ в порядку зростання, а під ними – у зворотному порядку. Коефіцієнти наступних пар рядків знаходяться за таким правилом. З чисел верхнього рядка кожної пари віднімаються відповідно числа нижнього рядка, попередньо помножені на таке число λ_i ($i=1,2,\dots$), щоби перша різниця обернулася у нуль. Відкидаючи цю нульову різницю, знаходимо перший рядок пари. Другий рядок утвориться тими ж коефіцієнтами, але написаними в зворотному порядку.

Визначення стійкості за коефіцієнтами характеристичного рівняння

	a_0 a_n	a_1 a_{n-1}	...	a_{n-1} a_1	a_n a_0
$\lambda_1 = \frac{a_0}{a_n} < 1$	$c_{0,2} = a_1 - \lambda_1 a_{n-1}$ $c_{n-1,2}$	$c_{1,2} = a_2 - \lambda_1 a_{n-2}$ $c_{n-2,2}$...	$c_{n-1,2} = a_n - \lambda_1 a_0$ $c_{0,2}$...
$\lambda_1 = \frac{c_{0,2}}{a_{n-1,2}}$	$c_{0,3} = c_{1,2} - \lambda_2 c_{n-2,2}$ $c_{n-2,3}$	$c_{1,3} = c_{2,2} - \lambda_2 c_{n-3,2}$ $c_{n-3,3}$
.....

Скориставшись цією таблицею і теоремою Шура, критерій стійкості можна сформулювати таким чином. Для того щоб замкнена ІС була стійкою, необхідно і достатньо, щоби коефіцієнти λ_i були за абсолютною величиною менше одиниці, тобто

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots) .$$

Будь-який з коефіцієнтів таблиці $c_{k,i}$ ($i \geq 2$), де перший індекс позначає номер стовпця (номер коефіцієнта), а другий – номер рядка, у якому знаходиться коефіцієнт, можна знайти за формулою:

$$c_{k,i} = c_{k+1,i-1} - \lambda_{i-1} c_{n-i-k+1,i-1} ,$$

де $\lambda_i = \frac{c_{0,i}}{c_{n-i+1,i}}$ і прийнято, що $c_{k,1} = a_k$.

АНАЛОГ КРИТЕРІЮ МИХАЙЛОВА

Нехай ми маємо характеристичний багаточлен імпульсної системи:

$$A^*(p) = a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_1 e^{pT} + a_0.$$

Зробимо заміну $z = e^{pT}$, тоді одержимо:

$$A^*(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

Зобразимо цей багаточлен у вигляді:

$$A_n^*(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

де z_1, z_2, \dots, z_n - корені багаточлена.

При зміні z уздовж окружності одиничного радіуса проти ходу годинникової стрілки (вважаємо, що коренів характеристичного рівняння на контурі немає) кожен множник $(z - z_i)$ змінює свій аргумент на 2π , якщо корінь z_i знаходиться усередині окружності одиничного радіуса і не змінює свого аргументу, якщо корінь знаходиться поза окружністю (принцип аргументу).

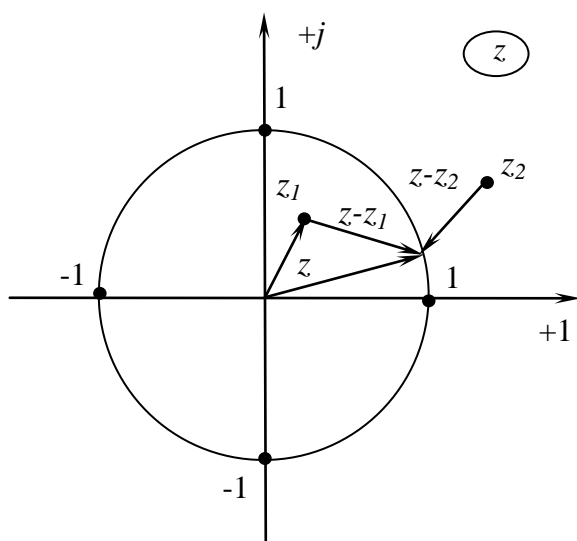


Рис. 18.1.

Таким чином, при зміні z уздовж одиничної окружності проти годинникової стрілки зміна аргументу $A^*(z)$ буде дорівнювати $2\pi m$, де m - число коренів усередині окружності одиничного радіуса (рис. 18.1). Зміні $z = e^{pT}$ уздовж окружності одиничного радіуса проти ходу годинникової стрілки відповідає зміна p від $-j\pi/T$ до $+j\pi/T$ чи зменшенню частоти ω від $-\pi/T$ до $+\pi/T$ (аргумент при цьому змінюється на $2\pi m$).

Для того, щоби імпульсна система була стійка необхідно і достатньо, щоби при зміні частоти ω від 0 до π/T вектор кривої $A^*(j\omega)$ проходив проти годинникової стрілки $2n$ квадрантів (де n - степінь характеристичного багаточлена).

Приклад. Дослідити стійкість замкненої системи (рис. 18.2):

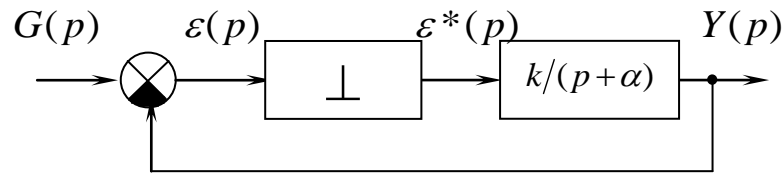


Рис. 18.2.

Знаходимо передаточну функцію замкненої системи:

$$W^*(p, \Delta t) = k \frac{e^{pT} e^{-\alpha \Delta t}}{e^{pT} + (k-1)e^{-\alpha T}}.$$

Характеристичний багаточлен системи:

$$A^*(p) = e^{pT} + (k-1)e^{-\alpha T}.$$

Зробимо заміну $p = j\omega$:

$$A^*(j\omega) = e^{j\omega T} + (k-1)e^{-\alpha T} = \cos \omega T + (k-1)e^{-\alpha T} + j \sin \omega T;$$

$$P^*(\omega) = \cos \omega T + (k-1)e^{-\alpha T}; \quad Q^*(\omega) = \sin \omega T$$

Змінюючи $0 \leq \omega \leq \pi/T$ будуємо годограф (рис. 18.3).

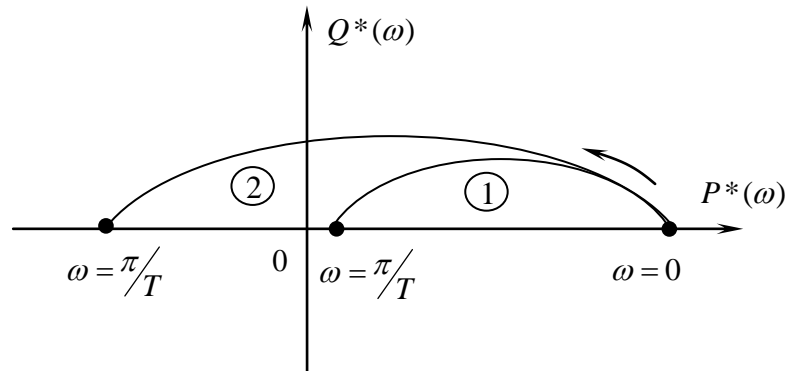


Рис. 18.3. Годограф

Крива 1 відповідає нестійкій, а 2 – стійкій системі. Як видно з наведеного рисунку стійкість системи залежить від величини коефіцієнта підсилення k . Для стійкої системи при π/T $P^*(\pi/T) = -1 + (k-1)e^{-\alpha T} < 0$.

Звідси одержуємо:

$$k < e^{\alpha T} + 1.$$

АНАЛОГ КРИТЕРІЮ СТІЙКОСТІ НАЙКВІСТА ДЛЯ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Нехай передаточна функція розімкненого ланцюга імпульсної системи:

$$W^*(p) = \frac{B^*(p, \Delta t)}{A^*(p)},$$

де B^* і A^* багаточлени по e^{pT} ступені m і n ($n > m$).

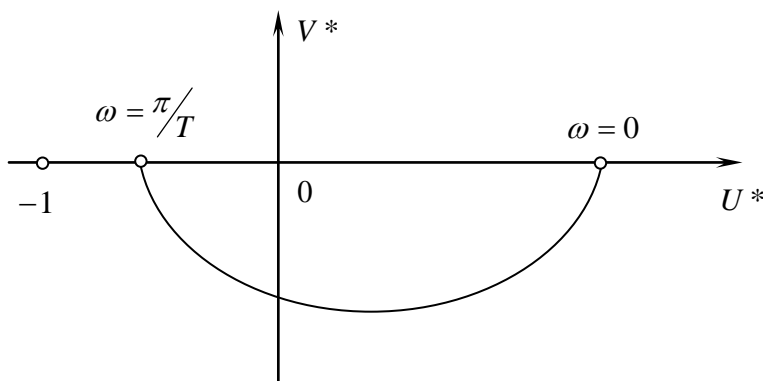
Покладемо $e^{pT} = z$, $\Delta t = 0$. Позначимо:

$$W_z^*(z) = \frac{B_z^*(z)}{A_z^*(z)}.$$

Розглянемо допоміжну функцію:

$$F^*(z) = 1 + W_z^*(z) = \frac{A_z^*(z) + B_z^*(z)}{A_z^*(z)} = \frac{C^*(z)}{A_z^*(z)},$$

де $C^*(z)$ - характеристичний багаточлен замкненої системи, а $A_z^*(z)$ - розімкненої.



За критерієм Михайлова у випадку стійкого розімкненого кола $\Delta \arg A_z^*(e^{j\omega})$, $0 \leq \omega \leq \pi/T$ (рис. 18.4).

Для стійкості ж замкненої системи потрібно, щоби $\Delta \arg C^*(e^{j\omega}) = \pi h$, $0 \leq \omega \leq \pi/T$ тобто потрібно, щоби зміна
Рис. 18.4.

аргументу дорівнювала $\Delta \arg F^*(e^{j\omega}) = \pi h - \pi h = 0$.

Годограф допоміжної функції не повинен охоплювати початок координат (рис. 18.5).

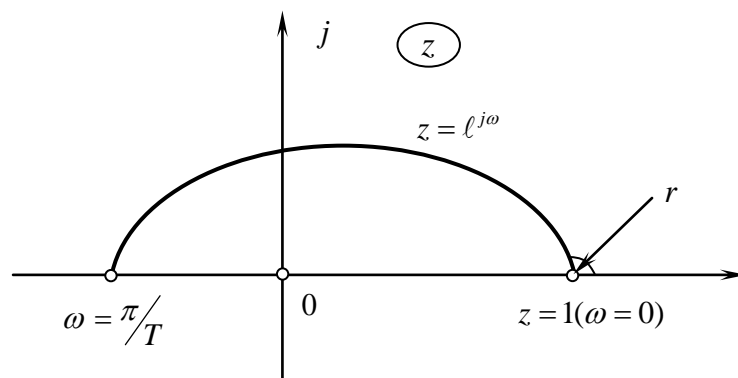


Рис. 18.5.

Отже, якщо розімкнене коло стійке, то для стійкості замкненої системи потрібно, щоби амплітудно-фазова частотна характеристика розімкненого кола не охоплювала точку $(-1; j0)$.

У випадку нейтрального розімкненого ланцюга, тобто при наявності в багаточлені $A^*(p)$ кореня $p=0$ чи в $A_z^*(z)$ кореня $z=1$, потрібно обходити контур, обминаючи точку $z=1$. Беручи до уваги полюс $z=1$, можемо записати:

$$W_z^*(z) = \frac{W_{1z}^*(z)}{z-1}.$$

Замість $z=1$ введемо:

$$z = 1 + re^{j\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

При цьому: $\lim_{r \rightarrow 0} W_z^*(1 + re^{j\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{W_{1z}^*(1 + re^{j\varphi})}{re^{j\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} Re^{-j\varphi}$, де $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Амплітудно-фазова характеристика приймає вигляд, що зображений на рис. 18.6, а формулювання критерію стійкості залишається без змін.

Нарешті, звернемося до випадку нестійкого розімкненого кола, коли передаточна функція $W^*(z)$ містить l полюсів поза одиничним колом. Тоді за принципом аргументу будемо мати

$$\Delta \arg A_z^*(e^{j\omega}) = \pi(n-l), \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T},$$

а для стійкості замкненої системи як і раніше потрібно виконання умови

$$\Delta \arg C^*(e^{j\omega}) = \pi n, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}.$$

Таким чином, зміна аргументу виразу $F^*(z)$ повинна задовольняти співвідношенню

$$\Delta \arg F^*(e^{j\omega}) = \pi n - \pi(n-l) = \pi l$$

Отже, для стійкості замкненої системи при нестійкому розімкненому колі потрібно, щоб амплітудно-фазова характеристика розімкненого кола охоплювала точку -1 на кут πl

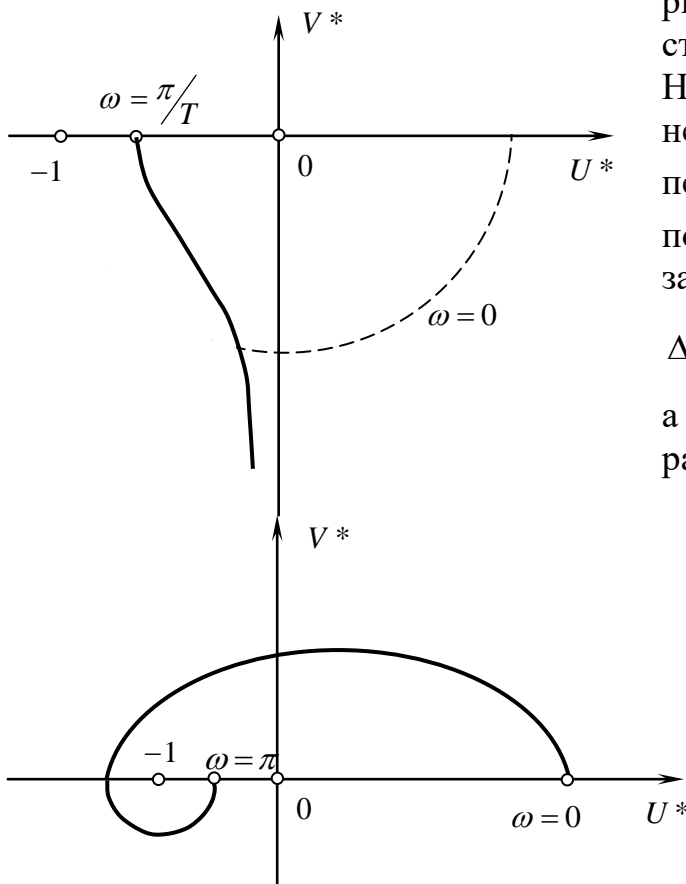


Рис. 18.6.

(проти годинникової стрілки), де l - число полюсів $W^*(z)$, що лежать поза одиничним колом $z = e^{j\omega}$.

Приклад показаний на рис. для випадку $l = 2$. Так само, як і у випадку неперервних систем, можна використовувати поняття про позитивні і негативні переходи АФЧХ. При цьому для стійкості системи в замкненому стані необхідно і достатньо, щоби різниця між кількістю позитивних і негативних переходів дорівнювала $l / 2$.

Нарешті, для дослідження стійкості імпульсних систем можуть застосовуватися також логарифмічні частотні характеристики. Формулювання частотного критерію стійкості тут залишається таким же, що і для неперервних систем, але треба мати на увазі деяку своєрідність самих характеристик імпульсних систем.

РОЗДІЛ 3. НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

Тема 3.1. Типові нелінійності. Основні методи аналізу нелінійних систем

Лекція 19. Нелінійні системи. Статичні та динамічні нелінійності. Метод припасовування. Фазовий простір. Фазова площина

НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

Система автоматичного керування називається нелінійною в тому випадку, якщо хоча б одна ланка системи описується нелінійним рівнянням (має нелінійну характеристику). Розрізняють статичні і динамічні нелінійності. **Статичні нелінійності** – це нелінійності статичних характеристик. На рис. 19.1 показані різні види нелінійних статичних характеристик. Нелінійності можуть бути неперервними, періодичними, динамічними. **Динамічні нелінійності** – це нелінійності, пов'язані з диференціальними рівняннями ланок, наприклад:

$$g(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + ax(t).$$

Усі перераховані нелінійності можна класифікувати як симетричні й однозначні (рис. 63, а, б, в) симетричні неоднозначні (рис. 63, г) несиметричні (рис. 63, д).

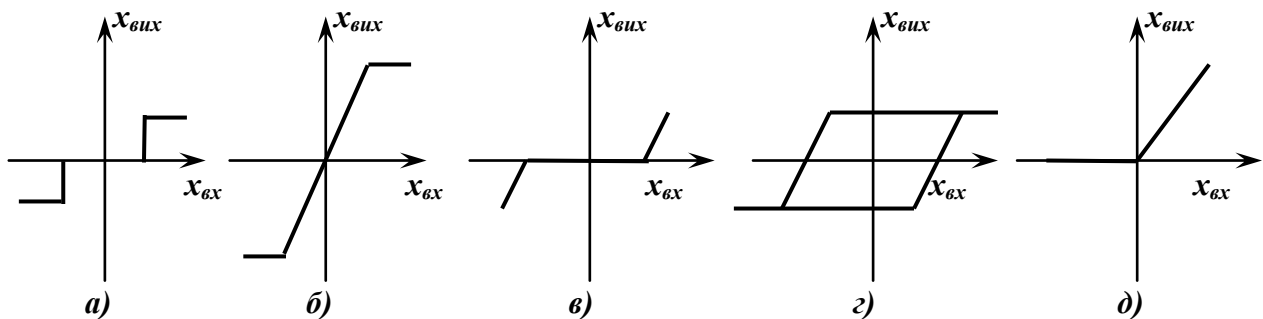


Рис. 19.1. Різновиди динамічних нелінійностей

Нелінійності в системах керування і регулювання можуть бути природно властиві даній системі (тертя, люфт, гістерезис, зона нечутливості, насичення) або ж спеціально введені для додання системі бажаних властивостей (релейні елементи, нелінійні і псевдолінійні коригувальні пристрої). Введення спеціальних нелінійностей призводить до різних нелінійних законів керування, що мають більш широкі можливості в порівнянні з лінійними.

Важливою особливістю нелінійних систем є те, що до них не застосовні принципи суперпозиції (лінійності) $L[\sum_i a_i g_i(t)] \neq \sum_i a_i L[g_i(t)]$ і

комутативності $W_1(p)W_2(p) \neq W_2(p)W_1(p)$. Ця обставина обмежує можливості застосування основного математичного апарата лінійних систем - перетворень Лапласа і Фур'є. Крім того, процеси в нелінійних системах істотно залежать від початкових умов. Для дослідження нелінійних систем знаходять застосування наступні методи: припасовування; фазового простору; малого параметру; гармонійної лінеаризації; перший і другий (прямий) Ляпунова; частотна теорема; частотний В.М.Попова та ін.

Метод припасовування застосовується до нелінійних систем, які можна зобразити як кусочно-лінійні. Сутність даного методу полягає в наступному. Виконують кусочно-лінійну апроксимацію нелінійної характеристики. З урахуванням початкових умов розв'язують лінійні диференціальні рівняння для першої ділянки. Потім знаходять час переходу на наступну ділянку лінійності й обчислюють значення реакції в цей момент часу. Далі вирішують лінійні диференціальні рівняння для другої ділянки, причому як початкові умови використовують обчислені кінцеві значення змінних стану на попередній ділянці і т.д.

Приклад. Знайти вихідну реакцію однополуперіодного випрямляча (рис. 19.2, а). Нелінійна вольт-амперна характеристика діода зображена на рис. б. Процеси в розглянутому пристрої описуються системою рівнянь

$$\begin{cases} e(t) = r(i)i(t) + U_c(t); \\ C \frac{dU_c(t)}{dt} = -\frac{U_c(t)}{R} + i(t); \end{cases}$$

де $r(i)$ — внутрішній опір вентиля.

При апроксимації нелінійності відповідно до рис. в розглянутій системі відповідають дві схеми заміщення: рис. 19.2, з (для першого інтервалу) і рис. 19.2, д (для другого). У даному випадку задача зводиться до визначення моменту переходу струму $i(t)$ через нуль. Якщо ж нелінійність апроксимується чотирма відрізками прямих (рис. 64, е) то одержуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} e(t) &= r_k i(t) + U_c(t), \\ C \frac{dU_c(t)}{dt} &= -\frac{U_c(t)}{R} + i(t); \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

де r_k — опір вентиля на k -ому інтервалі.

При заданих початкових умовах $u_c(0)$ знаходимо r_k і розв'язуємо систему диференціальних рівнянь, послідовно переходячи від попереднього інтервалу лінійності до наступного.

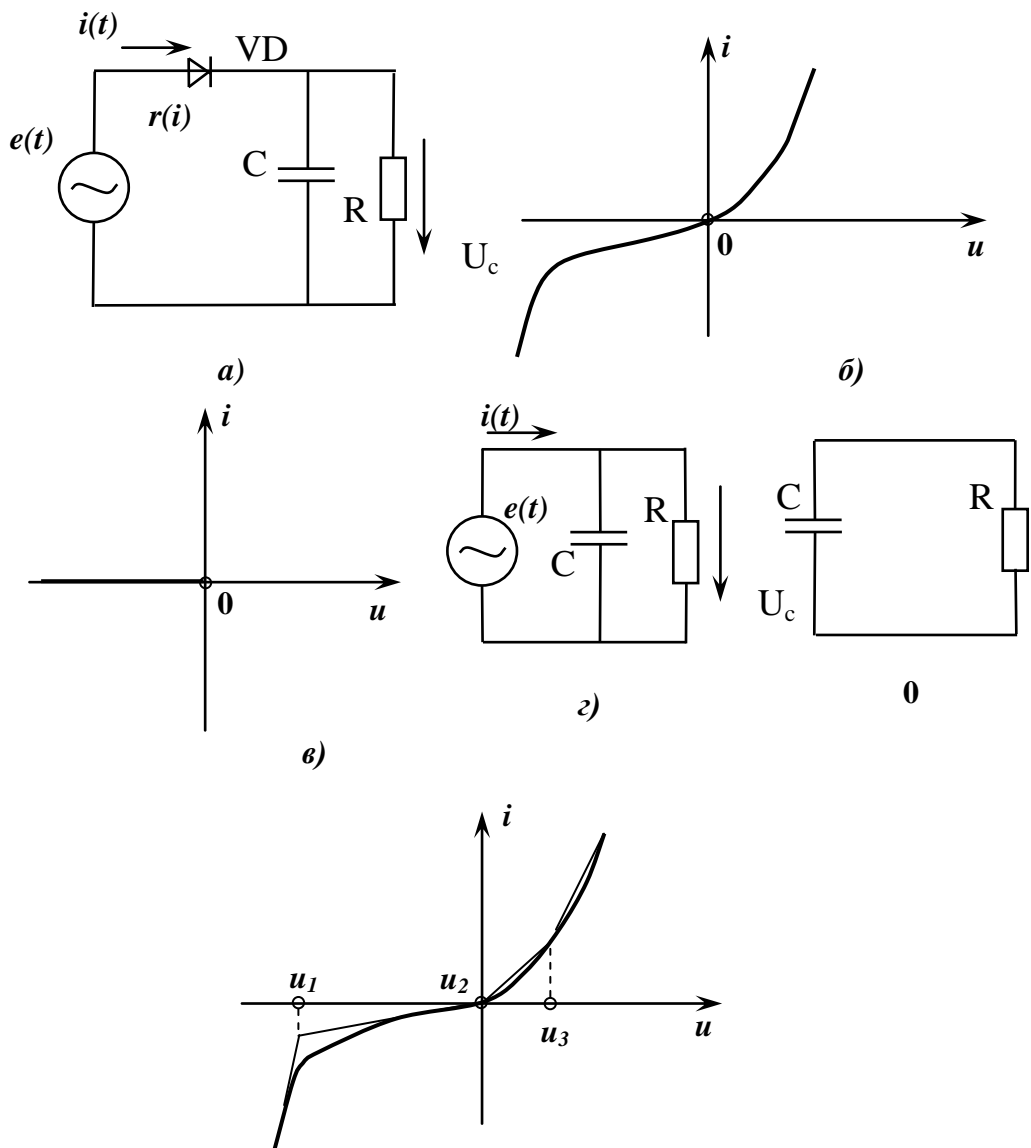


Рис. 19.2.

Фазовий простір і фазова площина. У загальному випадку нелінійна система може бути описана системою диференціальних рівнянь у нормальній формі

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \Phi_i \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t; g(t); f(t)\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

де $x_i(t)$ — координати стану системи; $g(t), f(t)$ — відповідно задавальний та збурюючий впливи. Для розгляду перехідних процесів, викликаних якими-небудь початковими відхиленнями координат (при відсутності зовнішніх впливів), ці рівняння для стаціонарних систем (систем з постійними параметрами) приймають вигляд

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \Phi_i \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Фазовим простором називають n -вимірний простір координат стану системи (x_1, x_2, \dots, x_n) . Початковий стан системи $x(t_0)$ зобразиться певною точкою M_0 з координатами $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$. Процес у часі одержить зображення у вигляді деякої кривої, яка називається *фазовою траєкторією* даної системи. Точка M на ній, що відповідає стану системи в довільний момент часу t , називається зображуючою точкою. Значення нелінійних функцій $\psi_i(\frac{dx_i(t)}{dt})$ визначають у кожний момент часу проєкції швидкості зображуючої точки на осі координат x_i .

Для системи другого порядку ($n = 2$) 2-вимірний простір називається *фазовою площиною*. У цьому випадку можна реально зображувати фазові траєкторії на площині (рис. 19.3, а). При цьому можна показати і інтегральну криву для даної системи, додавши вісь часу t (рис. 19.3, б).

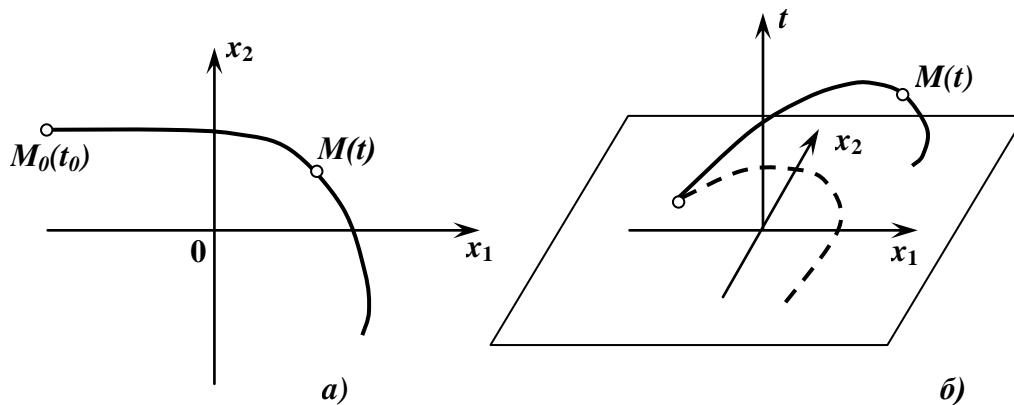


Рис. 19.3. Фазова траєкторія (а) та інтегральна крива (б) даної системи

Рівняння для системи другого порядку приймають вигляд:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \Phi_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = \Phi_2(x_1, x_2).$$

Вилучаючи час з цієї системи рівнянь, одержуємо диференціальне рівняння фазової траєкторії:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\Phi_2(x_1, x_2)}{\Phi_1(x_1, x_2)}.$$

Множина фазових траєкторій у площині x_1, x_2 для різних початкових умов називається *фазовим портретом*.

Приклад. Побудувати фазовий портрет процесів у схемі, показаної на рис. 19.4.

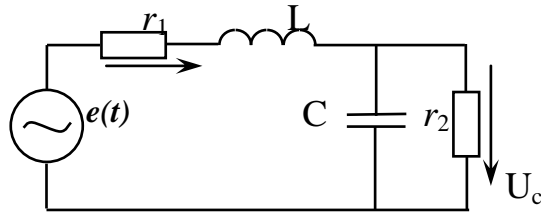


Рис. 19.4.

Процеси в розглянутій схемі можуть бути описані наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} e(t) = i(t)r_1 + L \frac{d_i(t)}{dt} + U_c(t); \\ i(t) = \frac{U_c(t)}{r_2} + C \frac{dU_c(t)}{dt}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{d_i(t)}{dt} = -\frac{r_1}{L} i(t) - \frac{U_c(t)}{L} + \frac{e(t)}{L}; \\ \frac{dU_c(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} - \frac{U_c(t)}{r_2 C}. \end{cases}$$

При відсутності впливу $e(t)$ вільний рух системи описується наступними рівняннями:

$$\begin{cases} \frac{d_i(t)}{dt} = -\frac{r_1}{L} i(t) - \frac{U_c(t)}{L}; \\ \frac{dU_c(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} - \frac{U_c(t)}{r_2 C}. \end{cases}$$

Як координати фазового простору приймаємо змінні $i(t)$ і $U_c(t)$. Рівняння для фазової траєкторії зображують у вигляді:

$$\frac{d_i(t)}{dU_c(t)} = \frac{\frac{1}{L} r_1 i(t) + \frac{U_c(t)}{L}}{\frac{U_c(t)}{r_2 C} - \frac{i(t)}{C}}.$$

Дана система лінійна, і всі зображуючі точки будуть рухатися по фазових траєкторіях до початку координат при будь-яких початкових умовах (рис. 19.5, а). Такий фазовий портрет називається стійким вузлом. Важливим типом особливих кривих на фазовій площині є граничні цикли - замкнуті криві, що відповідають періодичним процесам, в околі яких мають місце коливальні перехідні процеси. Якщо ці фазові траєкторії зсередини і ззовні сходяться до даного граничного циклу (рис. 19.5, б), то маємо стійкий граничний цикл, якщо ж вони віддаляються в обидва боки (рис. 19.5, в) — то нестійкий. Можливий і випадок двох граничних циклів (рис. 19.5, г), один із яких стійкий (у даному випадку зовнішній), а другий нестійкий. Фізичний зміст стійкого граничного циклу - автоколивання системи. Фізичний зміст нестійкого граничного циклу - границя областей початкових умов. При початкових умовах $x_1(t_0), x_2(t_0)$, що лежать усередині нестійкого граничного циклу, виходить загасаючий перехідний процес, якщо ж вони лежать ззовні — то незгасаючий.

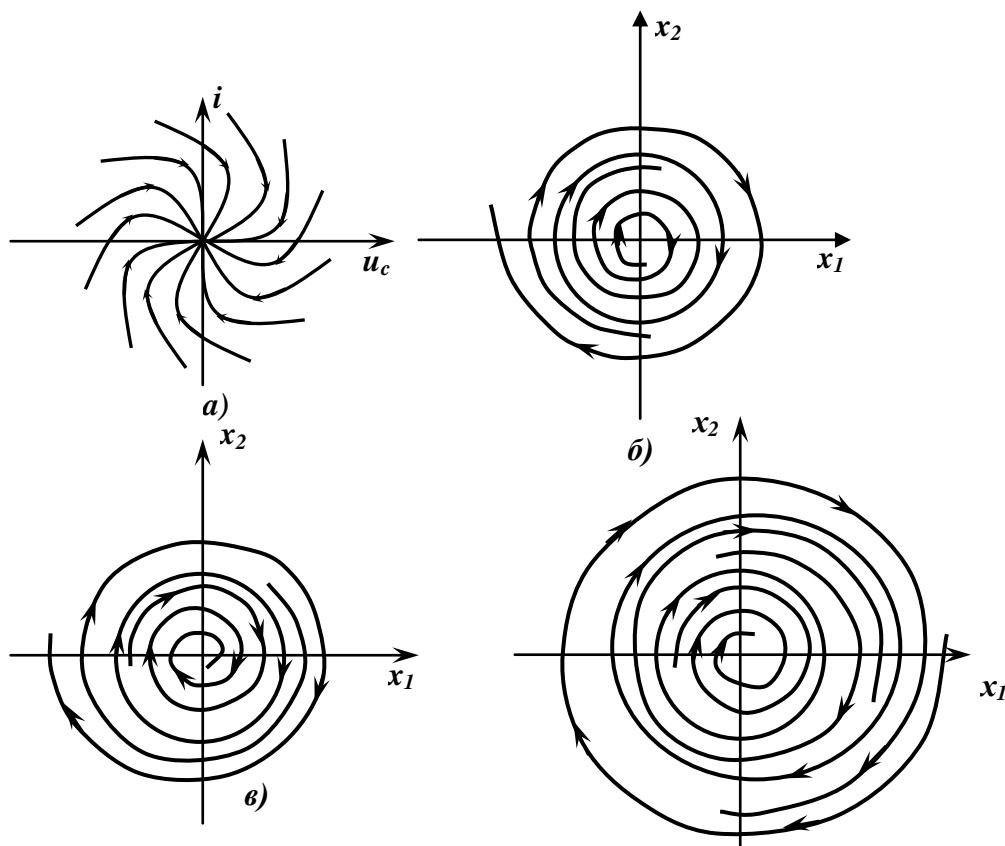


Рис. 19.5.

Для побудови якісної картини фазових траєкторій застосовують метод ізоклін. Ізокліною називається лінія, що з'єднує фазові траєкторії з однаковим нахилом дотичної, тобто для кожної ізокліни $\frac{dx_2}{dx_1} = C$. Якщо побудувати

декілька ізоклін, знаючи для кожної з них крутість нахилу фазових траєкторій, що їх перетинають, можна уточнити всю картину фазових траєкторій.

Нехай, наприклад, задана система:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = -1 \pm j2$.

Позначивши $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$ приведемо систему до вигляду:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 - 5x_1.$$

Диференціальне рівняння фазових траєкторій:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -2 - 5 \frac{x_1}{x_2}.$$

Для ізокліни $x_2 = k_u x_1$ звідси знаходимо:

$$C = -2 - \frac{5}{k_u}.$$

Візьмемо чотири значення. $k_u = 0, 1, \infty, -1$; тоді $C = -\infty, -7, -2, 3$.

Відповідні напрямки дотичних до фазових траєкторій показані на рис. 19.6 стрілками. Орієнтуючись по них, накреслюємо фазові траєкторії. Одна з них зображена на рис. 19.6.

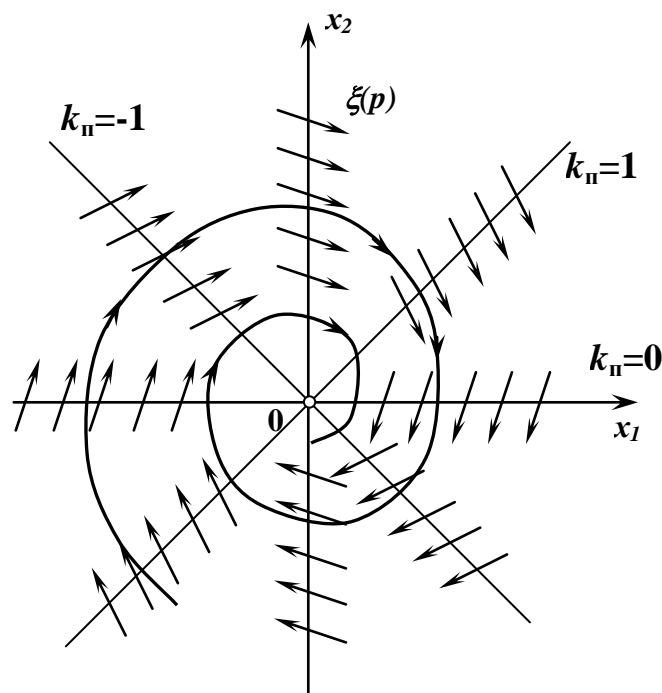


Рис. 19.6. Побудова фазових траєкторій методом ізокліна

Лекція 20. Характер процесів в нелінійних системах. Поняття про стан рівноваги та автоколивання

ХАРАКТЕР ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

Автоматичну систему, що містить один нелінійний елемент, можна звести до найпростішої схеми (рис. 20.1). Ця схема складається з нелінійного елемента і лінійної частини, що включає в себе лінійні елементи вихідної системи.

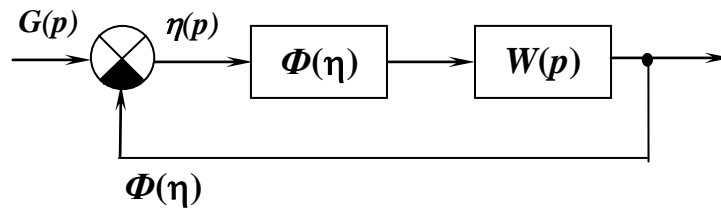


Рис. 20.1.

Дану систему можна описати наступним співвідношенням:

$$\eta(p) = G(p) - W(p)L\{\Phi(\eta)\},$$

де $G(p)$ — зображення вхідного впливу; $\Phi(\eta)$ — скалярна нелінійна функція. Після переходу в часову область одержимо:

$$\eta(t) = g(t) - \int_{t_0}^t \omega(t-\tau)\Phi\{\eta(\tau)\}d\tau,$$

де $\omega(t)$ — вагова функція лінійної частини системи. Якщо прийняти $t_0 = -\infty$, знаходимо усталений процес:

$$\eta_{уст}(t) = g(t) - \int_{-\infty}^t \omega(t-\tau)\Phi\{\eta_{уст}(\tau)\}d\tau,$$

або після заміни змінної $t - \tau$ на τ :

$$\eta_{уст}(t) = g(t) - \int_0^{\infty} \omega(\tau)\Phi\{\eta_{уст}(t-\tau)\}d\tau.$$

При відсутності зовнішнього впливу ($g(t) = 0$) одержуємо рівняння:

$$\eta_{уст}^a(t) = - \int_0^{\infty} \omega(\tau)\Phi\{\eta_{уст}^a(t-\tau)\}d\tau,$$

що визначає автономний стаціонарний стан нелінійної системи.

Для лінійної системи $\Phi(\eta_{уст}^a(\tau)) = \eta_{уст}^a(\tau)$ це рівняння приймає особливо простий вигляд:

$$\eta_{y_{cm}}^a(t) = -\int_0^{\infty} \omega(\tau) \cdot \eta_{y_{cm}}^a(t-\tau) d\tau .$$

Останнє рівняння має єдине рішення $\eta_{y_{cm}}^a(t) = \eta^a = 0$, що відповідає стану рівноваги. У нелінійних системах можливі декілька станів рівноваги. Якщо припустити $\eta_{y_{cm}}^a(t) = const$, одержуємо

$$\eta_{y_{cm}}^a = -\Phi(\eta_y^a) \int_0^{\infty} \omega(\tau) d\tau .$$

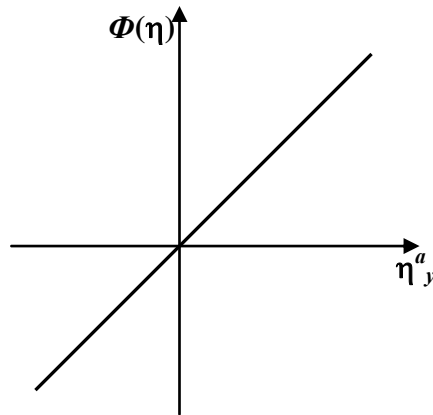


Рис. 20.2.

Передаюча функція $W(p)$ лінійної частини системи зв'язана з її ваговою функцією перетворенням Лапласа:

$$W(p) = \int_0^{\infty} \omega(\tau) \ell^{-p\tau} d\tau ,$$

а отже, при $p=0$:

$$W(0) = \int_0^{\infty} \omega(\tau) d\tau .$$

Тоді можна записати:

$$\eta_{y_{cm}}^a = -\Phi(\eta_{y_{cm}}^a) W(0) ,$$

або

$$\Phi(\eta_{y_{cm}}^a) = -\frac{1}{W(0)} \eta_{y_{cm}}^a .$$

Для розв'язання останнього рівняння необхідно побудувати графік нелінійної функції і пряму з нахилом $-\frac{1}{W(0)}$ (рис. 20.3). Абсциси точок їх перетину визначають значення можливих станів рівноваги. При $W(0) > 0$ стан

рівноваги системи єдиний $\eta_{yсм}^a = 0$, а при $W(0) < 0$ в системі можливі також стани рівноваги, відмінні від нульового.

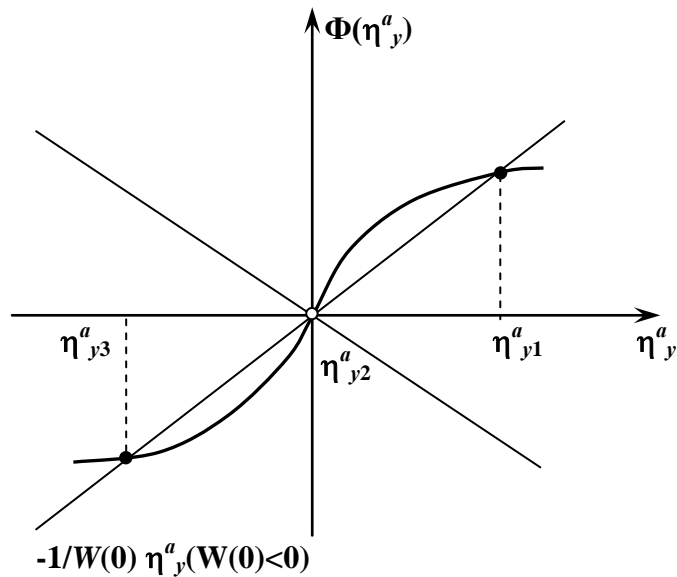


Рис. 20.3.

Крім станів рівноваги, у нелінійній системі можливі періодичні процеси. Ці автономні періодичні процеси, що

Рис. 71.

відповідають періодичним розв'язкам рівняння

$$\eta_{yсм}^a(t) = - \int_0^{\infty} \omega(\tau) \Phi(\eta_{yсм}^a(t - \tau)) d\tau, \text{ називаються } \underline{\text{автоколиваннями}}.$$

При зовнішньому впливі $g(t) \neq 0$, якщо $g(t) = const$, в нелінійній системі може існувати стан рівноваги або автоколивання. Якщо ж $g(t) \neq const$, а є деякою періодичною функцією, то можливі такі режими: режим биття — одночасне існування вимушених коливань і автоколивань; режим примусової синхронізації на основній частоті або на частоті субгармонік, коли періодичний вплив придушує автоколивання і нав'язує системі або свою частоту, або частоту, що менше цієї в ціле число раз.

Тема 3.2. Стійкість нелінійних систем. Теорема Ляпунова

Лекція 21. Стійкість нелінійних систем. Перший метод Ляпунова. Лінеаризація нелінійних систем «у малому»

СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Розглянуті можливі режими в нелінійних системах можуть існувати лише в тому випадку, якщо вони стійкі. У загальному випадку рівняння динаміки нелінійної системи при відсутності збурюючих впливів мають вигляд

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}.$$

Нехай $x_i^a(t)$ позначає деякий усталений процес у системі (незбурений рух). Стійкість будемо розглядати як властивість загасання вільного руху системи після початкового відхилення її від усталеного режиму. Введемо нові змінні

$$y_i(t) = x_i(t) - x_i^a(t).$$

Відносно змінних $y_i(t)$ рівняння збуреного руху у відхиленнях можна записати таким чином:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}.$$

При цьому незбурений рух буде $y_i^a(t) = 0$. Змінні y_i є координатами стану системи. Конкретний вигляд рівняння динаміки нелінійної системи залежить від вигляду сталого процесу $x_i^a(t)$ тому необхідно зазначити, про стійкість якого усталеного процесу (незбуреного руху) $x_i^a(t)$ йде мова.

Геометрично усталений (незбурений) рух $x_i^a(t)$ системи можна зобразити у вигляді деякої інтегральної кривої в n -вимірному просторі з доданою віссю часу t . Збурений рух $x_i(t)$, викликаний початковим відхиленням при $t = t_0$ зобразиться іншою інтегральною кривою. На рис. 21.1, а зображені ці криві для системи другого порядку. У відхиленнях $y_i(t)$, тобто в просторі координат стану системи, ця картина збуреного руху буде виглядати, як показано на рис. 21.1, б. При цьому незбурений рух $y_i^a(t) = 0$ зобразиться прямою лінією, що збігається з віссю t .

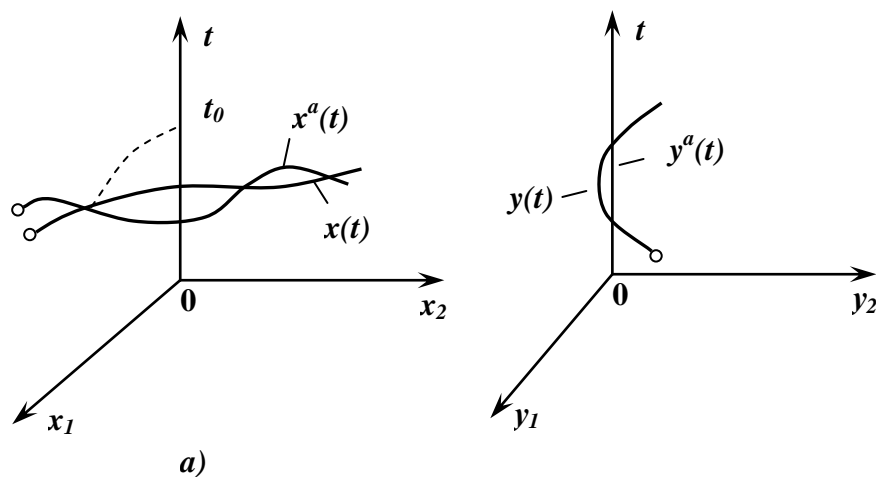


Рис. 21.1. Інтегральні криві геометрично усталеного (незбуреного) руху

Незбурений рух системи $y_i^a(t)$ називається стійким, якщо при заданому $\varepsilon > 0$, яким би малим воно не було, існує таке $\delta > 0$ залежне від ε , що при початкових умовах $|y_i(t_0)| < \delta$, $i = \overline{1, n}$ в подальшому русі системи $(t_0 < t < \infty)$ виконується умова $|y_i(t)| < \varepsilon$, $i = \overline{1, n}$.

Незбурений рух $y_i^a(t) = 0$ буде нестійким, якщо зазначена умова не виконується хоча б для одного з y_i .

Якщо зазначені раніше умови виконані і, крім того, $y_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то незбурений рух $y_i^a(t) = 0$ називається асимптотично стійким.

Якщо умови стійкості незбуреного руху $y_i^a(t)$ виконуються при нескінченно малих δ , то кажуть, що система стійка в малому, а при кінцевих початкових відхиленнях δ — система стійка у великому.

Якщо ж $y_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ після будь-яких початкових відхилень, то система називається стійкою у цілому (рис. 21.2).

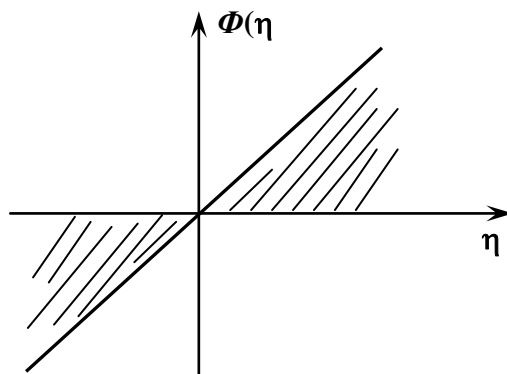


Рис. 21.2.

Якщо система асимптотично стійка у цілому при будь-якому характері нелінійності для визначеного класу нелінійностей, то має місце абсолютна стійкість. При цьому під *класом нелінійностей* розуміють сім'ю характеристик, розташованих у визначеному секторі, як показано на рисунку.

ПЕРШИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

Нехай процеси в САР описуються системою нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) ; \quad i = \overline{1, n}$$

Будемо називати $x_i^a(t)$ усталеним режимом системи, а $x_i(t)$ — збуреним режимом (виникає після впливу збурення в початковий момент t_0).

Змінні $y_i(t) = x_i(t) - x_i^a(t)$ будемо називати відхиленнями чи варіаціями. Якщо усі відхилення y_i дорівнюють нулю, то збурений режим збігається з усталеним.

Рівняння щодо відхилень будуть мати вигляд:

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n) , \quad i = \overline{1, n}$$

або в матричній формі:

$$\dot{Y} = \Phi(Y) .$$

Сталому режиму відповідає:

$$Y^a = 0 ; \quad \Phi(Y^a) = 0 .$$

При дослідженні стійкості нульового рішення системи розглядають лише малі відхилення Y , що дозволяє провести розкладання правої частини рівнянь у ряд по степенях Y (ряд Тейлора):

$$\dot{Y} = R \cdot Y + \varphi(Y, t) ,$$

де $R = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right|_{Y=0}$; $\varphi(Y, t)$ поєднує члени вище першого порядку малості по Y .

Будемо вважати, що $\varphi(Y, t)$ має порядок малості вище першого рівномірно по t , тобто не допускаються члени вигляду $y_i^2 t$, що необмежено зростають з часом.

Так як відхилення y_i малі, то нехтуючи залишковим членом $\varphi(Y, t)$, одержимо лінеаризовані рівняння

$$\dot{Y} = R \cdot Y, \quad R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j} \right)_{y_j=0}.$$

Системі лінеаризованих рівнянь (рівнянь першого наближення) відповідає характеристичне рівняння

$$A(p) = \begin{vmatrix} r_{11} - p & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} - p \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad A(p) = [R - pI] = 0.$$

Теорема 1. Якщо лінеаризована система стійка, то усталений (незбурений) рух у нелінійній системі асимптотично стійкий.

Теорема 2. Якщо лінеаризована система нестійка, то усталений (незбурений) рух у вихідній нелінійній системі нестійкий.

У критичних випадках, коли $A(p)$ має нульові або чисто уявні корені, а інші корені лежать у лівій півплощині, судити про стійкість нелінійної системи по рівняннях першого наближення не можна, тому що стійкість залежить від вигляду $\varphi(Y, t)$. У цьому випадку потрібно розглядати рівняння динаміки в їх початковій формі або користуватися іншими критеріями.

Приклад. Нехай нелінійна система описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 - 3y_2 + 4y_2^2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 - 5y_2^2 \end{cases} \quad ; \text{тоді} \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} = 2; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} = -3 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} = 1; \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

Система рівнянь для лінеаризованої системи має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 - 3y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 \end{cases}; \quad A(p) = \begin{bmatrix} 2-p & -3 \\ 1 & -p \end{bmatrix} = -p(2-p) + 3 = 0.$$

$$p^2 - 2p + 3 = 0; \quad p_1 = 1 + j\sqrt{2}, \quad p_2 = 1 - j\sqrt{2}.$$

Корені характеристичного рівняння мають позитивні дійсні частини, отже нелінійна система нестійка.

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ У МАЛОМУ

Великий клас нелінійних систем може бути описаний наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = RY(t) + q\xi(t); \\ \sigma(t) = r^T Y(t); \\ \xi(t) = \Phi(\sigma(t)), \end{cases},$$

де r і q – вектори-колонки; r^T – вектор-рядок; T – символ транспонування; $Y(t)$ – вектор-колонка змінних стану системи; σ – деяка скалярна величина; $\Phi(\sigma)$ – скалярна нелінійність.

Застосуємо до лівої та правої частин рівнянь системи перетворення Лапласа. Тоді одержимо

$$\begin{cases} (pI - R)Y(p) = q\xi(p); \\ \sigma(p) = r^T Y(p); \\ \xi(p) = \Phi(\sigma(p)), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \sigma(p) = -r^T (R - pI)^{-1} q\xi(p); \\ \xi(p) = \Phi(\sigma(p)), \end{cases}$$

де I – одинична матриця, $(R - pI)^{-1}$ – матриця, обернена до матриці $(R - pI)$.

Величина $W(p) = r^T (R - pI)^{-1} q$ називається передаточною функцією лінійної частини системи (див. рис. 21.3).

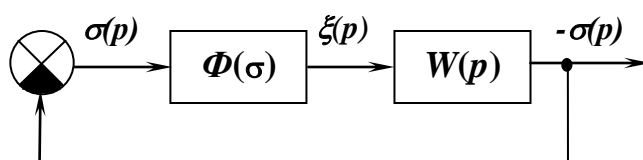


Рис. 21.3.

Необхідно провести лінеаризацію отриманої системи. Для цього початкову систему рівнянь зобразимо у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = RY(t) + q\Phi(\sigma); \\ \sigma(t) = r^T Y(t). \end{cases}$$

Лінеаризацію проводимо в околі точки $Y(t) = 0$ (рис. 21.4):

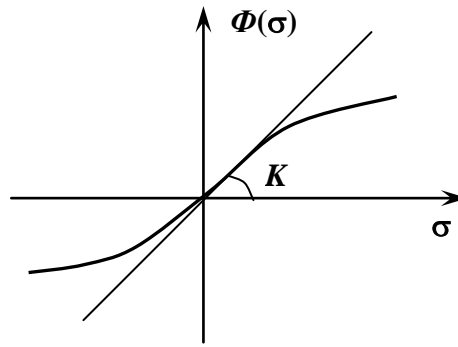


Рис. 21.4.

$$\frac{dY(t)}{dt} = RY(t) + qK\sigma(t), \quad \sigma(t) = r^T Y(t); \quad K = \left. \frac{d\Phi(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}.$$

Лекція 22. Функції Ляпунова. Прямий (другий) метод Ляпунова. Теорема Ляпунова

ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА

Деяку функцію n змінних $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ будемо називати **знаковизначеною функцією**, якщо для будь-яких значень y_i вона зберігає свій знак і обертається в нуль тільки на початку координат.

Приклад. $V = ay_1^2 + by_2^2$ (рис. 76, а), $a > 0, b > 0$. $V = \int_0^y f(y)dy$, якщо $f(y) = Ky$, $K > 0$ (рис. 22.1, б).

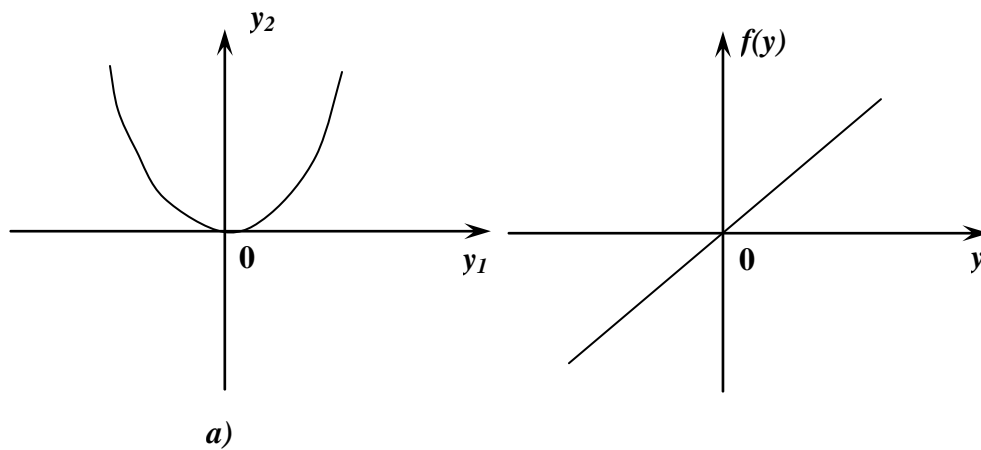


Рис. 22.1.

Знаковизначена функція може бути додатньо визначена і від'ємно визначена. Якщо функція зберігає той самий знак при будь-яких значеннях змінних, але обертається в нуль не тільки на початку координат, то вона називається **знакосталою** (додатньою чи від'ємною).

Приклад. $V = (y_1 + y_2)^2 + y_3^2$. Функція обертається в нуль на прямій $y_1 = -y_2$ і $y_3 = 0$.

Функція називається **знакозмінною**, якщо вона в розглянутій області не зберігає свій знак, наприклад: $V = y_1 + y_2 + y_3 \cdot n$

Згідно з **критерієм Сільвестра** квадратична форма $V = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_iy_j$ (де a_{ij} — дійсні коефіцієнти) буде **знаковизначеною** (додатньою) тоді і тільки тоді, коли всі головні діагональні мінори матриці її коефіцієнтів будуть додатніми.

Приклад. $V = 5y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 - 6y_1y_2 + 4y_1y_3 - 2y_2y_3$. Матриця коефіцієнтів даної квадратичної форми має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Тоді маємо: $\Delta_1 = 5 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 9 = 6 > 0$;

$$\Delta_3 = 2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - 6 + 1 + 6 = 1 > 0$$

Отже, дана функція додатньо визначена. Функції $V(Y)$ від координат стану системи, що обертаються в нуль на початку координат, називаються функціями Ляпунова.

ПРЯМИЙ (ДРУГИЙ) МЕТОД ЛЯПУНОВА

Нехай є нелінійна система, яка описується рівняннями динаміки:

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}$$

Складемо похідну функції Ляпунова за часом:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{dV}{dy_2} \frac{dy_2}{dt} + \dots + \frac{dV}{dy_n} \frac{dy_n}{dt}.$$

Тоді можна записати:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy_1} \Phi_1 + \frac{dV}{dy_2} \Phi_2 + \dots + \frac{dV}{dy_n} \Phi_n.$$

У результаті виходить деяка функція координат стану системи:

$$\frac{dV}{dt} = F(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Відомо, що градієнт функції $V(Y)$ є вектор, обумовлений проекціями $\partial V / \partial y_i$ на осі координат, тобто:

$$\text{grad} V = \left\{ \frac{\partial V}{\partial y_1}, \frac{\partial V}{\partial y_2}, \frac{\partial V}{\partial y_3}, \dots, \frac{\partial V}{\partial y_n} \right\}.$$

Введемо вектор $\Phi(Y)$ із проекціями:

$$\Phi_1 = \frac{dy_1}{dt}, \Phi_2 = \frac{dy_2}{dt}, \dots, \Phi_n = \frac{dy_n}{dt}.$$

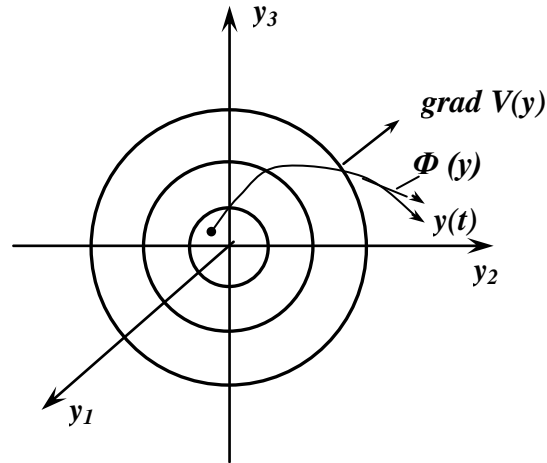


Рис. 22.2.

Вектор $\Phi(Y)$ являє собою вектор швидкості руху зображуючої точки по фазовій траєкторії (рис. 22.2).

Тоді одержуємо:

$$\frac{dV}{dt} = F(Y) = \text{grad}V(Y) \cdot \Phi(Y),$$

де y — вектор координат стану системи. Таким чином, похідна функції Ляпунова за часом являє собою скалярний добуток градієнта цієї функції на вектор фазової швидкості. Вектор $\text{grad}V(Y)$ перпендикулярний до поверхні $V = \text{const}$ і спрямований у бік зростання значення $V(Y)$ (рис.). Якщо похідна $dV(Y)/dt > 0$, то вектор фазової швидкості $\Phi(y)$ утворює з вектором $\text{grad}V(Y)$ гострий кут, тобто фазова траєкторія перетинає поверхню $V(Y) = \text{const}$ у бік збільшення значень $V(Y)$. Якщо ж $dV/dt < 0$, то кут між $\text{grad}V(Y)$ і $\Phi(Y)$ тупий, а фазова траєкторія йде в бік зменшення значень $V(Y)$.

Теорема Ляпунова про стійкість. Якщо для системи рівнянь $\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ існує знаковизначена функція $V(Y)$, похідна якої $dV/dt = F(Y)$ є знакопостійною функцією протилежного знака, то рішення системи $y^a(t) = 0$ стійке.

Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. Якщо для системи рівнянь $\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ існує знаковизначена функція $V(y)$, похідна якої $dV/dt = F(y)$ є знаковизначеною функцією, але протилежного знака, то рішення системи $y^a(t) = 0$ буде стійким асимптотично.

Теорема Ляпунова про нестійкість. Якщо для системи рівнянь $dy_i/dt = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ існує яка-небудь функція $V(y)$, похідна якої $dV/dt = F(y)$ є знаковизначеною функцією, причому в будь-якому як завгодно малому околі початку координат є область, у якій знак $V(y)$ збігається зі знаком $F(y)$ рішення системи $y^a(t) = 0$ нестійке.

Теорема Ляпунова дають достатні умови стійкості (нестійкості) рішення $y^a(t) = 0$ нелінійної системи. Це означає, що якщо умови теорем задовольняються, то система стійка (нестійка). Але це не означає, що система не може бути стійкою (нестійкою) і за межами цих умов. Наскільки повно умови теореми охоплюють дійсну область стійкості системи, залежить від вибору функції Ляпунова $V(y)$.

Розглянемо методику застосування теорем Ляпунова для дослідження стійкості.

Приклад. Нехай лінійна система описується рівнянням:

$$\frac{dy}{dt} = ay, \quad a < 0.$$

Функцію Ляпунова виберемо у вигляді $V(y) = by^2, b > 0$ (додатня знаковизначена функція). Знайдемо похідну функції Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = 2by \frac{dy}{dt} = 2aby^2 < 0.$$

Таким чином, похідна функції Ляпунова dV/dt є від'ємною знаковизначеною функцією. Функція Ляпунова і її похідна мають протилежні знаки, і, отже, система асимптотично стійка.

Приклад. Розглянемо нелінійну систему (рис. 22.3). Нелінійна функція Φ може мати довільну непарно-симетричну форму, що задовольняє умовам:

$$\Phi(\sigma) = 0|_{\sigma=0}; \quad \sigma\Phi(\sigma) > 0; \quad \sigma \neq 0.$$

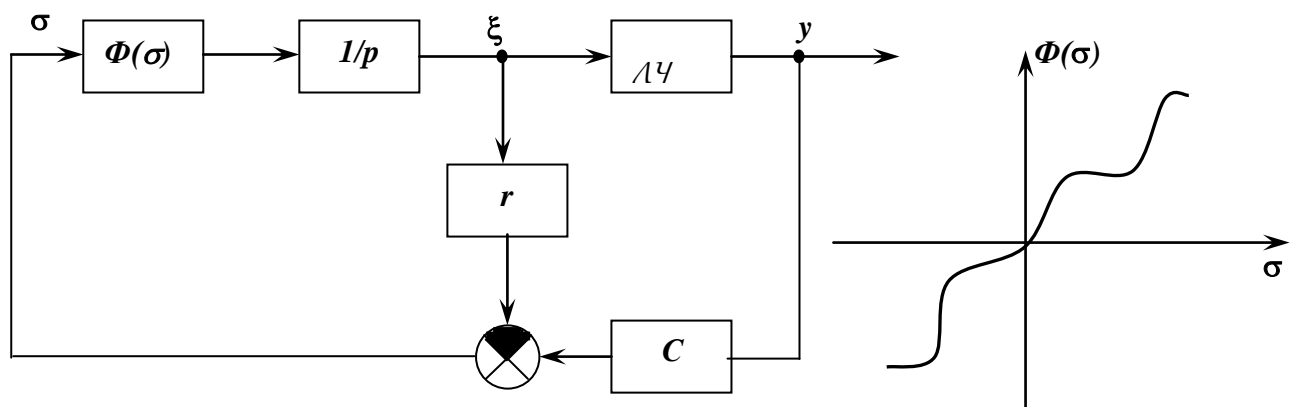


Рис. 22.3.

Нехай система описується наступними рівняннями в матричній формі:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ay + b\xi; \\ \frac{d\xi}{dt} = \Phi(\sigma); \\ \sigma = cy - r\xi. \end{cases}$$

Будемо вважати, що лінійна частина системи стійка, тобто $a < 0$.

Введемо нову змінну $z = ay + b\xi$. Тоді $\frac{dz}{dt} = a\frac{dy}{dt} + b\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\sigma}{dt} = c\frac{dy}{dt} - r\frac{d\xi}{dt}$.

З урахуванням отриманих співвідношень вихідну систему рівнянь можна зобразити у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = az + b\Phi(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{dt} = cz - r\Phi(\sigma) \end{cases}$$

При цьому повинна дотримуватися умова невиродженості загальної матриці системи:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & -r \end{vmatrix} \neq 0.$$

Функцію Ляпунова виберемо в наступному вигляді:

$$V(z, \sigma) = hz^2 + \int_0^\sigma \Phi(\sigma) d\sigma, \quad h > 0$$

Похідна функції Ляпунова:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2hz\frac{dz}{dt} + \Phi(\sigma)\frac{d\sigma}{dt} = 2haz^2 + 2hzb\Phi(\sigma) + c\Phi(\sigma)z - r\Phi^2(\sigma) = \\ &= 2ahz^2 + 2\Phi(\sigma)z(bh + c/2) - r\Phi^2(\sigma). \end{aligned}$$

Цей вираз являє собою квадратичну форму. Відповідно до теорем Ляпунова про стійкість похідна dV/dt повинна бути або знаковизначеною, або знакосталою від'ємною функцією. Скористаємося критерієм Сільвестра для встановлення додатньої визначеності функції — dV/dt .

$$-\frac{dV}{dt} = -2ahz^2 - 2\Phi(\sigma)z(bh + c/2) + r\Phi^2(\sigma).$$

Матриця коефіцієнтів даної квадратичної форми буде мати вигляд
$$\begin{bmatrix} -2ah & -(bh + c/2) \\ -(bh + c/2) & r \end{bmatrix}.$$
 Для неї $-2ah > 0$ тому що за умовою $a < 0, h > 0$.

$$\begin{bmatrix} -2ah & -(bh + c/2) \\ -(bh + c/2) & r \end{bmatrix} = -2ahr - (bh + c/2)^2 > 0.$$

Звідси одержуємо $2r|a|h > (bh + c/2)^2$.

При виконанні отриманої умови похідна функції Ляпунова dV/dt буде знаковизначеною і від'ємною.

Отже, система буде асимптотично стійкою. Внаслідок того, що до умови стійкості не входять ніякі параметри нелінійної характеристики $\Phi(\sigma)$, ці умови справедливі при довільній формі нелінійності, яка задовольняє обговорені в умові вимоги (тобто для цілого класу нелінійностей). Тому отримані умови є умовами абсолютної стійкості системи.

КРИТЕРІЙ В.М. ПОПОВА

Розглянемо нелінійну систему, яка описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ry + q\xi; \\ \sigma = r^T y; \\ \xi = \Phi(\sigma). \end{cases}$$

Будемо вважати, що нелінійність розташована у заданому секторі (рис. 23.1), тобто виконується нерівність:

$$0 \leq \frac{\Phi(\sigma)}{\sigma} \leq \mu, \quad \sigma \neq 0$$

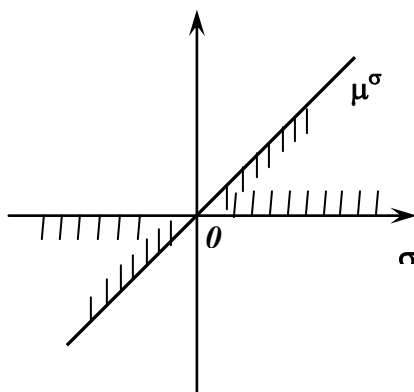


Рис. 23.1.

Дану нерівність можна записати у вигляді:

$$\xi(\sigma - \mu^{-1}\xi) \geq 0.$$

Використовуємо функцію Ляпунова вигляду:

$$V(y) = y^T H y + \vartheta \int_0^\sigma \Phi(\sigma) d\sigma > 0; \quad \vartheta > 0,$$

де $H = H^T$ — дійсна матриця (симетрична); ϑ — число.

Знайдемо похідну функції Ляпунова:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2y^T H \frac{dy}{dt} + \vartheta \xi \frac{d\sigma}{dt} = 2y^T H (Ry + q\xi) + \vartheta \xi r^T \frac{dy}{dt} = \\ &= 2y^T H (Ry + q\xi) + \vartheta \xi r^T (Ry + q\xi). \end{aligned}$$

Очевидно, що похідна функції Ляпунова є квадратичною формою щодо змінних y і ξ .

$$\frac{dV}{dt} = F(y, \xi) .$$

У відповідності з другим (прямим) методом Ляпунова квадратична форма $F(y, \xi)$ (похідна функції Ляпунова) повинна бути від'ємною при виконанні умови:

$$\mathfrak{F}(y, \xi) = -\xi(\sigma - \mu^{-1}\xi) \leq 0 .$$

Вимога від'ємної визначеності форми $F(y, \xi)$ не у всьому просторі, а в деякій його частині (умова $\mathfrak{F}(y, \xi) \leq 0$) істотно ускладнює задачу. Для перетворення цих умов використовуємо прийом, що називається *S-процедурою*.

$$S(y, \xi) = F(y, \xi) - \tau \mathfrak{F}(y, \xi), \quad \tau \geq 0 ,$$

і вимагатимемо, щоб форма $S(y, \xi)$ була від'ємно визначеною, тобто $S(y, \xi) < 0$.

Розглянемо тепер питання про існування матриці $H = H^*$, для якої виконана нерівність $S(y, \xi) < 0$. Нехай шукана матриця H існує. Поширюючи форму $S(y, \xi)$ до ермітової, одержимо

$$S(y, \xi) = 2 \operatorname{Re} y^* H (Ry + q\xi) + \nu \operatorname{Re} [\xi^* r^* (Ry + q\xi)] + \tau \operatorname{Re} [\xi^* (\sigma - \mu^{-1}\xi)]$$

Тут y, ξ — довільні комплексні вектор і число. Нехай y і ξ зв'язані співвідношенням:

$$j\omega y = Ry + q\xi ,$$

де ω — дійсне число таке, що $\det(R - j\omega I) \neq 0$ (тобто $j\omega$ не є власним числом матриці R). Тоді:

$$S(y, \xi) = 2 \operatorname{Re} [y^* H j\omega y] + \nu \operatorname{Re} [\xi^* r^* j\omega y] + \tau \operatorname{Re} [\xi^* (\sigma - \mu^{-1}\xi)] .$$

Враховуючи, що $y^* H y$ є ермітовою формою (дійсна функція по визначенню ермітовою форми), $2 \operatorname{Re} j\omega y^* H y = 0$. Крім того, за умовою $r^* y = \sigma$. Таким чином, форму $S(y, \xi)$ можна привести до вигляду:

$$S(y, \xi) = \nu \operatorname{Re} [\xi^* j\omega \sigma] + \tau \operatorname{Re} [\xi^* (\sigma - \mu^{-1}\xi)] .$$

Враховуючи зв'язок між змінними σ і ξ , $\sigma = -W(p)\xi$ і замінивши $p = j\omega$, одержуємо:

$$\begin{aligned} S(y, \xi) &= -\nu \operatorname{Re} [j\omega W(j\omega)] |\xi|^2 - \tau \operatorname{Re} [W(j\omega) + \mu^{-1}] |\xi|^2 = \\ &= -\nu \operatorname{Re} [j\omega W(j\omega)] |\xi|^2 - \tau \left[\frac{1}{\mu} + \operatorname{Re} W(j\omega) \right] |\xi|^2 . \end{aligned}$$

Скористаємося квадратичним критерієм. У цьому випадку повинні виконуватися наступні умови:

- 1) матриця R не має власних значень на уявній осі;

- 2) нелінійна система при $\xi = \mu_0 \sigma (\mu_0 \in [0, \mu])$ стійка;
- 3) виконана частотна умова:

$$S(y, \xi) = \{-\nu \operatorname{Re}[j\omega W(j\omega)] - \tau[\frac{1}{\mu} + \operatorname{Re}W(j\omega)]\} | \xi |^2 < 0$$

Тоді система буде абсолютно стійка. Перепишемо частотну умову в дещо іншому вигляді:

$$\nu \operatorname{Re}[j\omega W(j\omega)] + \tau/\mu + \tau \operatorname{Re}W(j\omega) > 0 .$$

Розділимо останню нерівність на τ і позначимо $\nu/\tau = h$

$$\frac{1}{\mu} + \operatorname{Re}W(j\omega) + \operatorname{Re} j\omega h W(j\omega) = \frac{1}{\mu} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega h)W(j\omega)] > 0 .$$

Отриману нерівність називають частотною умовою В.М. Попова.

Теорема. Нехай у нелінійній системі R - гурвіцева матриця (тобто лінійна система стійка) і для деякого h й усіх ω виконана частотна умова. Тоді система абсолютно стійка.

Так як $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$, то частотну нерівність можна зобразити у вигляді:

$$U(\omega) - \omega h V(\omega) + \frac{1}{\mu} > 0$$

Для зручності графічного відображення цієї нерівності вводиться модифікована частотна характеристика лінійної частини системи $W_M(j\omega) = U_M(\omega) + jV_M(\omega)$, причому $U_M(\omega) = U(\omega)$, $V_M(\omega) = \omega V(\omega)$.

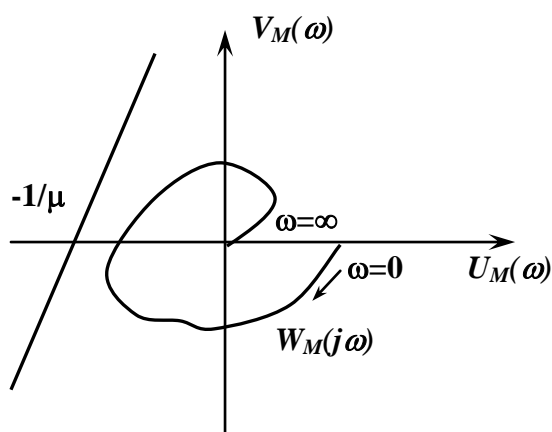
Тоді

$$U_M(\omega) - h V_M(\omega) + \frac{1}{\mu} > 0 .$$

Виконання отриманої умови зручно перевіряти графічно. Вираз

$$U_M(\omega) - h V_M(\omega) + \frac{1}{\mu} = 0$$

являє собою пряму, що проходить через точку $-1/\mu$ на дійсній осі



$U_M(\omega)$ з нахилом $1/h$. У координатах $U_M(\omega), V_M(\omega)$ будується також і модифікована частотна характеристика лінійної частини системи $W_M(j\omega)$. Звідси випливає наступне формулювання.

Нелінійна система зі стійкою лінійною частиною і нелінійною характеристикою, що знаходиться усередині сектора $[0, \mu]$ буде абсолютно

стійкою, якщо через точку $-1/\mu$ можна

Рис. 23.2.

провести пряму так, що вона не перетне модифіковану частотну характеристику (остання лежить праворуч) (рис. 23.2).

Приклад. Дослідити абсолютну стійкість стану рівноваги нелінійної системи (рис. 23.3, а). Характеристика нелінійності зображена на рис. 23.3, б. Передаточна функція лінійної частини системи:

$$W(p) = K/(1 + T_1 p)(1 + T_2 p), \quad K = 20; \quad T_1 = 1; \quad T_2 = 0,1.$$

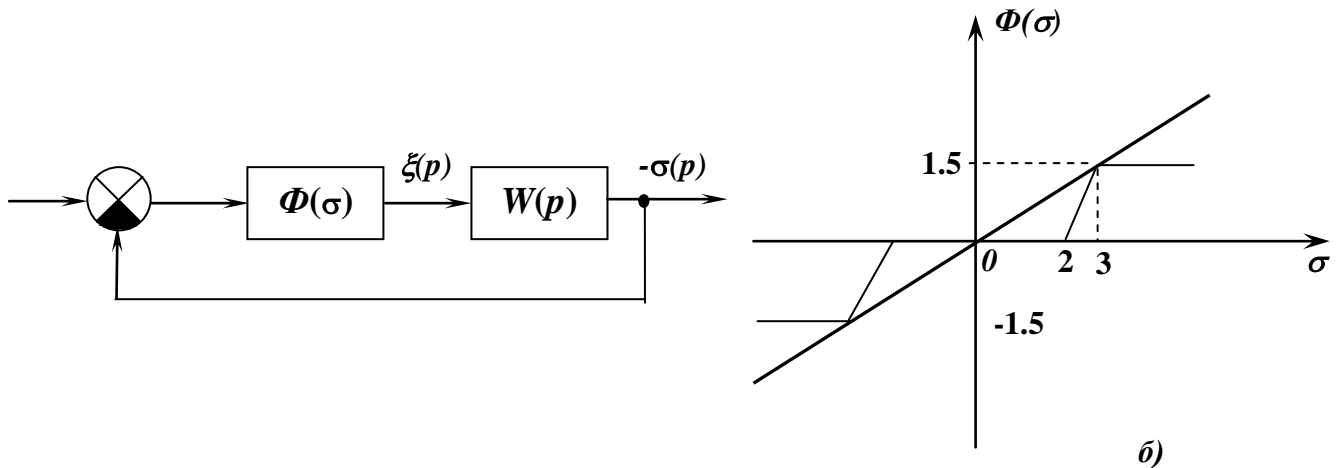


Рис. 23.3.

Лінійна частина системи стійка, тому що характеристичне рівняння:

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) = 0$$

має від'ємні дійсні корені. АФЧХ лінійної частини системи може бути знайдена по її передаточній функції шляхом заміни $p \rightarrow j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}.$$

Виділимо дійсну і уявну частину АФЧХ:

$$W(j\omega) = \frac{K(1 - j\omega T_1)(1 - j\omega T_2)}{(1 + j\omega T_1)(1 - j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 - j\omega T_2)} = \frac{K(1 - \omega^2 T_1 T_2) - jK\omega(T_1 + T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}$$

Таким чином,

$$U(\omega) = \frac{K(1 + \omega^2 T_1 T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}; \quad V(\omega) = -\frac{K\omega(T_1 + T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}.$$

Модифікована АФЧХ лінійної частини системи $W_M(j\omega)$ буде мати вигляд

$$U_M(\omega) = \frac{K(1 + \omega^2 T_1 T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}; \quad V(\omega) = -\frac{K\omega^2(T_1 + T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}.$$

Графік модифікованої АФЧХ, побудований з урахуванням числових значень параметрів, зображений на рис. 23.4.

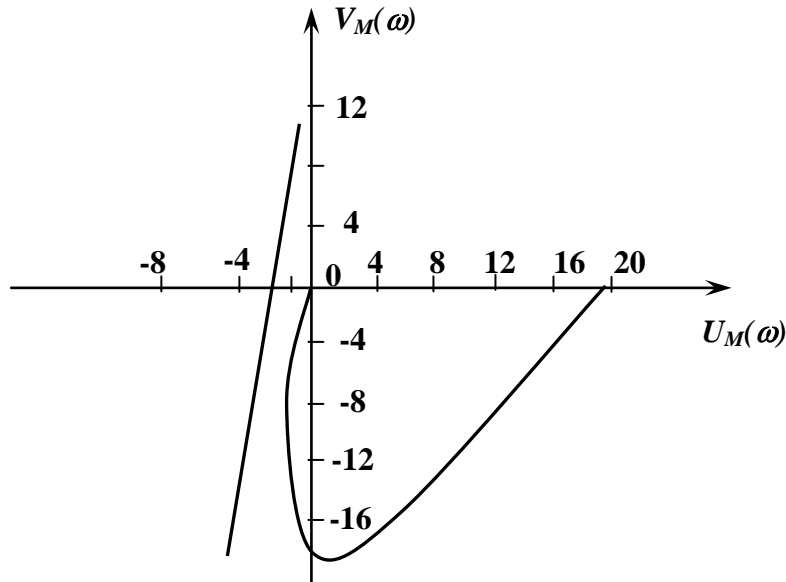


Рис. 23.4. Графік модифікованої АЧХ

Сектор, у середині якого знаходиться нелінійна характеристика $\xi = \Phi(\sigma)$, визначається віссю абсцис і прямою лінією $\xi = \mu\sigma$, де $\mu = 1,5 : 3 = 0,5$.

На дійсну вісь координатної площини $U_M(\omega)$, $V_M(\omega)$ наносимо точку $-1/\mu = -2$. Через точку з координатами $(-2; j0)$ можна провести пряму таким чином, щоб вона не перетнула годограф модифікованої АФЧХ. Отже, дана нелінійна система стійка.

Зауваження. Якщо умови критерію В.М. Попова не виконуються, то не можна зробити висновок про те, що система нестійка. Система може бути як стійкою, так і нестійкою. Необхідно провести додаткові дослідження, використовуючи інші критерії стійкості.

Тема 3.3. Дослідження періодичних режимів в нелінійних системах

Лекція 24. Метод гармонічної лінеаризації: основні положення. Симетричні коливання. Несиметричні коливання. Гармонічна лінеаризація деяких типів нелінійностей

МЕТОД ГАРМОНІЧНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Даний метод застосовується для дослідження нелінійних систем, лінійна частина яких описується диференціальними рівняннями третього і більш високих порядків. Основу цього наближеного методу складають наступні положення.

Будемо розглядати нелінійну автоматичну систему будь-якої складності за структурою, але з однією нелінійністю. Тоді, виділивши цю нелінійність в окрему ланку, можна всю іншу частину системи об'єднати в єдиний блок — лінійну частину (рис. 24.1).

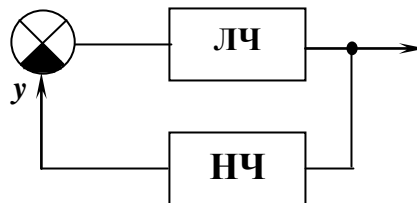


Рис. 24.1. Нелінійна автоматична система

Нехай лінійна частина описується передаточною функцією:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)},$$

причому степінь багаточлена $B(p)$ менше, ніж $A(p)$. Тоді амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) лінійної частини $|W(j\omega)|$ буде наближатися до нуля при $\omega \rightarrow \infty$. Початок цієї частотної характеристики може мати два варіанти (1, 2 на рис. 24.2) в залежності від того, чи є нульовий полюс у передаточній функції $W(p)$.

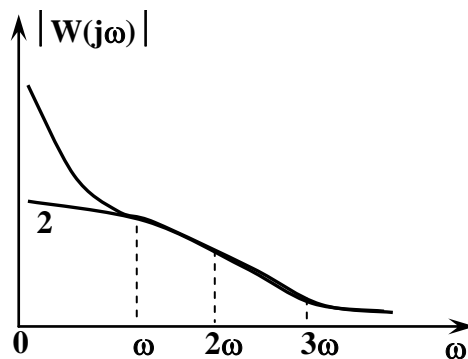


Рис. 24.2. АЧХ лінійної частини

Нехай у даній замкненій системі можливі власні періодичні коливання (автоколивання) з частотою ω_1 . Припустимо, що в нашій системі модуль АФЧХ на частотах вищих гармонік значно менший, ніж для першої

$$|W(jn\omega)| \ll |W(j\omega)|, \quad n = 2, 3, \dots$$

Ця властивість називається властивістю фільтра лінійної частини системи. Таким чином, лінійна частина системи буде добре пропускати першу гармоніку нелінійних коливань y (див. наведений нижче рисунок) і послабляти усі вищі гармоніки. Тому змінна x на вході нелінійної ланки виявиться близькою до синусоїди

$$x \approx a \sin \omega t.$$

При несиметричних коливаннях з'явиться ще постійна складова

$$x \approx a_0 + a \sin \omega t.$$

Періодичний вихідний сигнал нелінійної частини $y = \Phi(x)$ можна розкласти в ряд Фур'є (рис. 24.3):

$$y = \Phi(a \sin \omega t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t),$$

де:

$$A_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi(a \sin \omega t) dt,$$

$$A_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi(a \sin \omega t) \cos n\omega t dt,$$

$$B_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi(a \sin \omega t) \sin n\omega t dt.$$

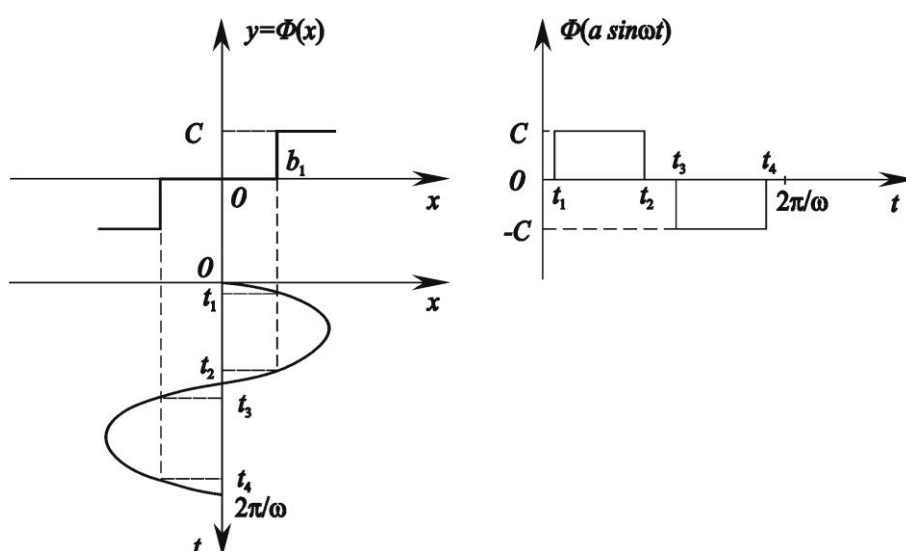


Рис. 24.3.

Метод полягає в дослідженні проходження першої гармоніки змінної y по замкнутому колу. Запишемо вираз для першої гармоніки змінної y :

$$y = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t$$

В результаті вся задача зводиться до визначення двох параметрів: амплітуди a і частоти ω у випадку симетричних коливань. Несиметричні коливання визначаються трьома невідомими: a, ω і постійною складовою a_0 . Відзначимо, що при необхідності можна враховувати і вплив вищих гармонік вихідного сигналу нелінійної ланки.

Симетричні коливання. При цьому $A_0 = 0$. На вході лінійної частини діє сигнал

$$y = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t .$$

Так як

$$x = a \sin \omega t, \quad \sin \omega t = \frac{x}{a} .$$

Тоді

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t, \quad \cos \omega t = \frac{dx}{dt} / a\omega .$$

З урахуванням цих співвідношень першу гармоніку вихідного сигналу нелінійної ланки можна зобразити у вигляді:

$$y = \frac{A_1}{a\omega} \frac{dx}{dt} + \frac{B_1}{a} x .$$

Застосувавши до лівої і правої частин цього виразу неперервне перетворення Лапласа (при нульових початкових умовах), будемо мати

$$y(p) = \frac{A_1}{a\omega} p x(p) + \frac{B_1}{a} x(p) \quad \left(p = \frac{d}{dt} \text{ оператор диференціювання} \right).$$

Введемо позначення:

$$\frac{B_1}{a} = q(a), \quad \frac{A_1}{a} = q'(a) .$$

Одержимо:

$$y(p) = \frac{q'(a)}{\omega} p x(p) + q(a) x(p) = [q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p] x(p) .$$

Це співвідношення називається формулою гармонічної лінеаризації нелінійності, а коефіцієнти $q(a), q'(a)$ — коефіцієнтами гармонічної лінеаризації.

Позначивши $\varphi = \omega t$, можна записати:

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi , \quad q'(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi .$$

Гармонічно лінеаризована передаточна функція нелінійної ланки має вигляд:

$$W_H(a, p) = \frac{y(p)}{x(p)} = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p .$$

Необхідно підкреслити, що лінеаризовану передаточну функцію ми одержали тільки для конкретного вигляду періодичного розв'язку $x = a \sin \omega t$.

Несиметричні коливання. У цьому випадку періодичне розв'язок буде мати вигляд:

$$x = a_0 + a \sin \omega t .$$

В результаті гармонічної лінеаризації одержимо

$$y = \Phi(x) = \frac{\Phi_0(a_0, a)}{p} + [q(a, a_0) + \frac{q'(a, a_0)}{\omega} p] x' ,$$

де $x' = a \sin \omega t$.

$$\Phi_0(a, a_0) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \Phi(a_0 + a \sin \varphi) d\varphi ,$$

$$q(a_0, a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \Phi(a_0 + a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi ,$$

$$q'(a_0, a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \Phi(a_0 + a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi .$$

З виразу для вихідної величини нелінійності y видно, що вона містить постійну складову Φ_0 і періодичну складову, виражену через $x' = a \sin \omega t$. Причому кожна з них залежить не тільки від відповідної складової входу (тобто Φ_0 залежить не тільки від a_0 , а періодична — не тільки від a), але і від обох відразу. Це є істотною відмінністю нелінійної ланки від лінійної й обумовлює незастосовність тут принципу суперпозиції.

Гармонічна лінеаризація деяких типів нелінійностей. Проілюструємо методику обчислення коефіцієнтів гармонічної лінеаризації на декількох прикладах: спочатку для симетричних коливань, а потім для несиметричних. Попередньо відзначимо, що якщо непарно-симетрична нелінійність однозначна, то:

$$q'(a) \equiv 0, \quad y = \Phi(x) = q(a)x ,$$

причому для обчислення коефіцієнта гармонічної лінеаризації $q(a)$ можна скористатися виразом

$$q(a) = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} \Phi(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi .$$

Для петльової непарно-симетричної нелінійності буде мати місце повний вираз

$$y = \Phi(x) = [q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p]x .$$

Однак для обчислення $q(a)$ і $q'(a)$ можна скористатися формулами

$$q(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} \Phi(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi ,$$

$$q'(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} \Phi(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi .$$

Приклад. Розглянемо однозначні релейні характеристики. Для ідеальної релейної ланки (рис. 24.4):

$$q'(a) = 0; \quad q(a) = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} c \sin \varphi d\varphi = \frac{4c}{\pi a} [-\cos \varphi]_0^{\pi/2} = \frac{4c}{\pi a} .$$

На рис. 24.4, в зображена графічна залежність $q(a)$. Для релейного елемента з зоною нечутливості (рис. 24.5)

$$q'(a) = 0; \quad q(a) = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} c \sin \varphi d\varphi = \frac{4c}{\pi a} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{4c}{\pi a} [-\cos \varphi]_{\varphi_1}^{\pi/2} = \frac{4c}{\pi a} \cos \varphi_1 .$$

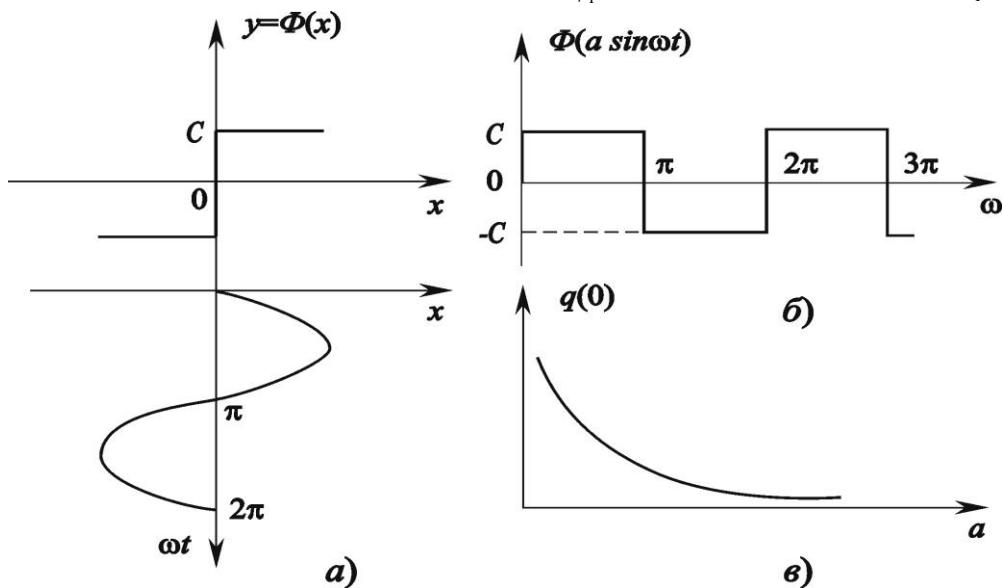


Рис. 24.4.

Враховуючи, що $a \sin \varphi_1 = b$, $\sin \varphi_1 = b/a$, $\cos \varphi_1 = \sqrt{1 - b^2/a^2}$,

Одержуємо:

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - b^2/a^2}, \quad a > b .$$

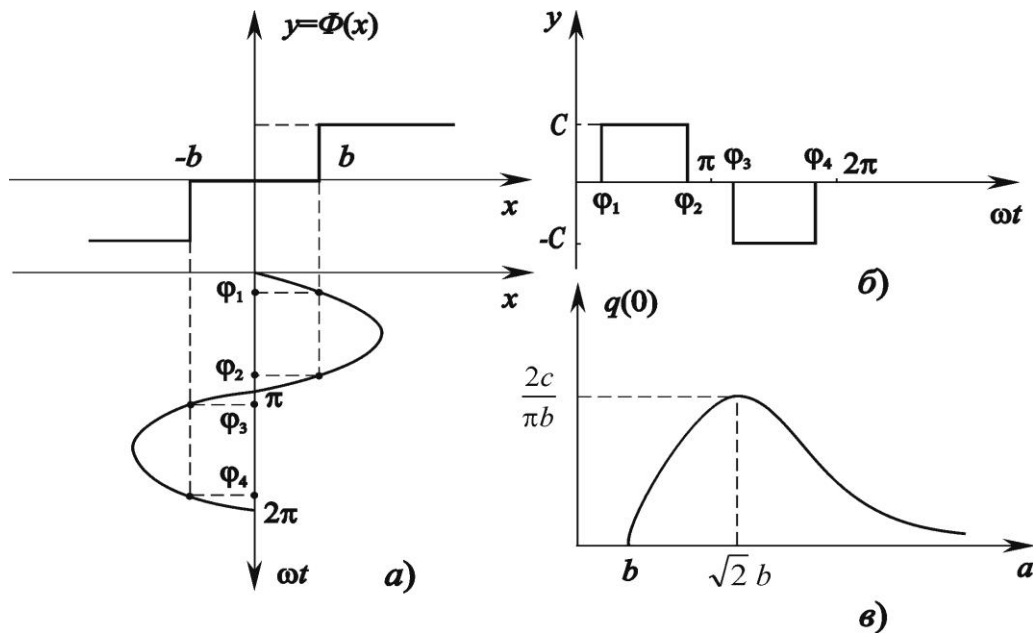


Рис. 24.5.

На рис. 24.5, в показана графічна залежність $q(a)$. З отриманого виразу можна знайти характеристику гармонічної лінеаризації ідеальної релейної ланки, для чого необхідно покласти $b = 0$.

Приклад. Розглянемо характеристику з зоною нечутливості, лінійною ділянкою і насиченням (рис. 24.6). Тут $q'(a) = 0$, а коефіцієнт $q(a)$ має два варіанти значень відповідно до рис. 24.6, б, де для них побудована $y = \Phi(x)$:

1) при

$$b_1 \leq a \leq b_2; q(a) = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} K(a \sin \varphi - b_1) \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{\pi a} \left[\int_{\varphi_1}^{\pi/2} K a \sin^2 \varphi d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\pi/2} K b_1 \sin \varphi d\varphi \right] = \frac{4}{\pi a} K a \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right] \Big|_{\varphi_1}^{\pi/2} + \frac{4 K b_1}{\pi a} \cos \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{4 K}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right] - \frac{4 K b_1}{\pi a} \cos \varphi_1.$$

З урахуванням $a \sin \varphi_1 = b$; $\sin \varphi_1 = b_1/a$; $\cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}}$;

$\varphi_1 \arcsin \frac{b_1}{a}$, одержуємо

$$q(a) = K - \frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{2K}{\pi} \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} - \frac{4K}{\pi} \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} = K - \frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{b_1}{a} -$$

$$-\frac{2K}{\pi} \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} = K - \frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} \right);$$

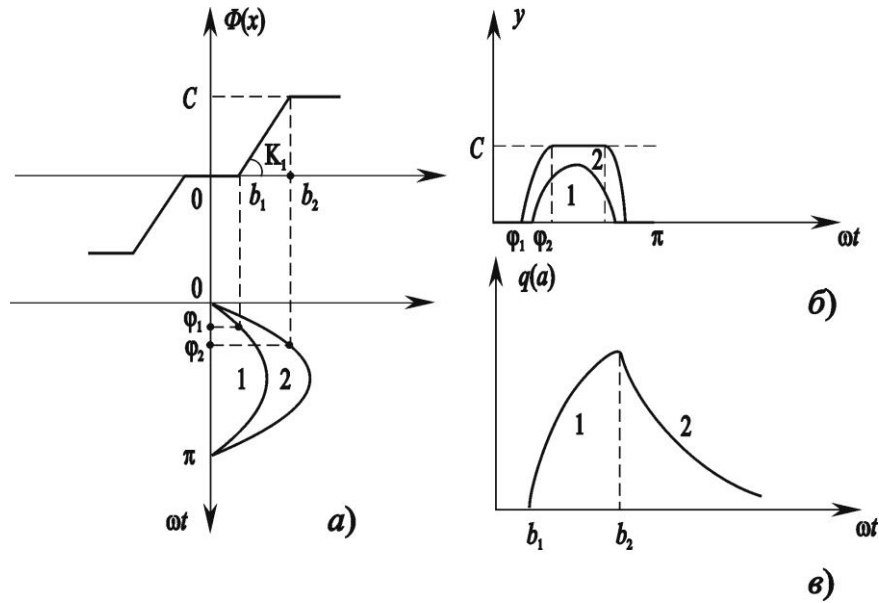


Рис. 24.6.

2) при $a \geq b_2$

$$q(a) = \frac{4}{\pi a} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K(a \sin \varphi - b_1) \sin \varphi d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\pi/2} C \sin \varphi d\varphi \right], \quad C = K(b_2 - b_1),$$

що з урахуванням співвідношення $a \sin \varphi_2 = b_2$ дає

$$q(a) = \frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{a} - \arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a} \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{a^2}} - \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} \right).$$

Графічно результат показаний на рис. 24.6, в.

Як окремі випадки коефіцієнти $q(a)$ для двох характеристик (рис. 24.7, а та рис. 24.8, а) відповідно дорівнюють:

$$q(a) = K - \frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right), \quad a \geq b;$$

$$q(a) = \frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right), \quad a \geq b,$$

що зображено графічно на рис. 24.7, б та рис. 24.8, б. При цьому для характеристики з насиченням маємо $q(a) = K$ при $0 \leq a \leq b$.

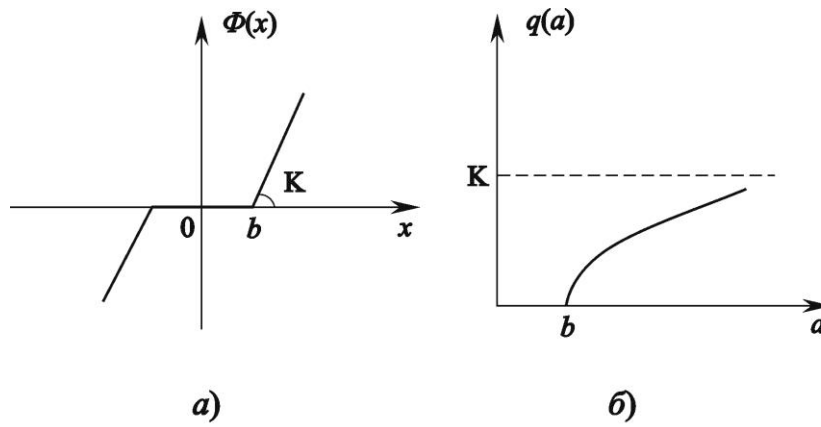


Рис. 24.7.

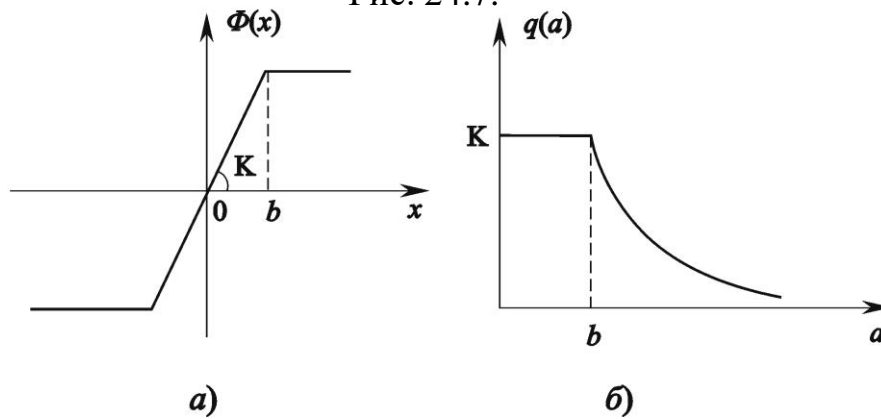


Рис. 24.8.

Приклад. Визначимо коефіцієнти гармонічної лінеаризації для двозначних непарно-симетричних нелінійностей (рис. 24.9). Вхідний сигнал $x = a \sin \omega t$, вихідний сигнал $y = \Phi(x) = \Phi(a \sin \omega t)$. Переключення відбувається в моменти часу, коли $x_1 = \pm b$ або $x_2 = \pm mb$, де m — коефіцієнт повернення. Коефіцієнти гармонічної лінеаризації визначаються у відповідності з наступними виразами:

$$q(a) = \frac{2}{\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{2c}{\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{2c}{\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) ;$$

$$q'(a) = \frac{2}{\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = -\frac{2c}{\pi a} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2).$$

$$\text{Так як } \sin \varphi_1 = b/a; \quad \cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}};$$

$$\sin(\pi - \varphi_2) = \frac{mb}{a} ; \quad \cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}} ,$$

остаточно одержуємо

$$q(a) = \begin{cases} \frac{2c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}}, & a \geq b; \\ 0, & a < b; \end{cases} \quad q(a) = \begin{cases} -\frac{2cb}{\pi a^2} (1 - m), & a \geq b; \\ 0, & a < b; \end{cases}$$

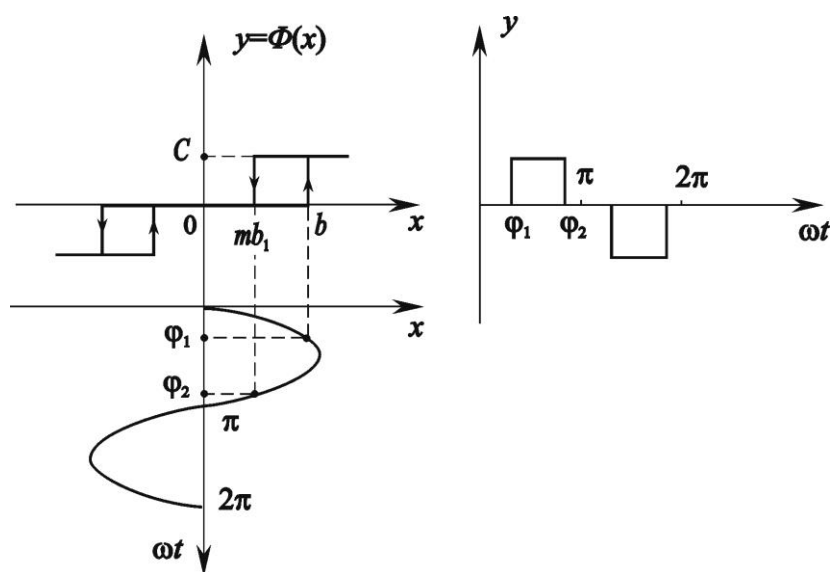


Рис. 24.9.

Приклад. Розглянемо приклад обчислення коефіцієнтів гармонічної лінеаризації для несиметричних коливань (рис. 24.10)

$$\Phi_0(a_0, a) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\varphi_1}^{\pi - \varphi_1} C d\varphi - \int_{\pi + \varphi_2}^{2\pi - \varphi_2} C d\varphi \right] = \frac{C[\pi - \varphi_1 - \varphi_1 - \pi + \varphi_2 + \varphi_2]}{2\pi} = \frac{C}{\pi} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

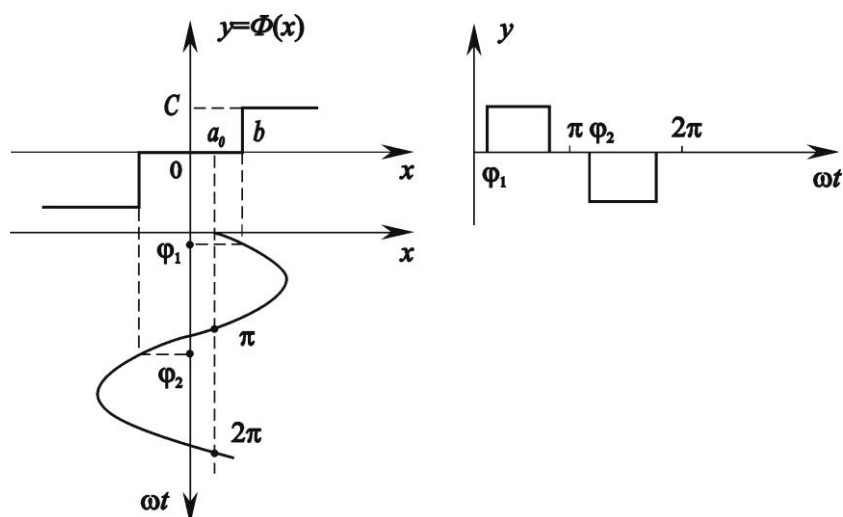


Рис. 24.10.

Так как $\sin \varphi_1 = \frac{b-a_0}{a}$, $\sin \varphi_2 = \frac{b+a_0}{a}$, то

$$\Phi_0(a_0, a) = \frac{C}{\pi} \left(\arcsin \frac{a_0 + b}{2} - \arcsin \frac{b - a_0}{2} \right);$$

$$q(a_0, a) = \frac{1}{\pi a} \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} C \sin \varphi d\varphi - \int_{\pi+\varphi_2}^{2\pi-\varphi_2} C \sin \varphi d\varphi = \frac{C}{\pi a} \left[-\cos \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} + \cos \varphi \Big|_{\pi+\varphi_2}^{2\pi-\varphi_2} \right] =$$

$$\frac{2C}{\pi a} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2);$$

$$q(a_0, a) = \frac{2C}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b+a_0}{a} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b-a_0}{a} \right)^2} \right);$$

$$q'(a_0, a) = \frac{1}{\pi a} \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} C \cos \varphi d\varphi - \int_{\pi+\varphi_2}^{2\pi-\varphi_2} C \cos \varphi d\varphi = 0.$$

Лекція 25. Алгебраїчний спосіб визначення параметрів автоколивань та їх стійкості

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ АВТОКОЛИВАНЬ І ЇХНЬОЇ СТІЙКОСТІ

Розглянемо алгебраїчний спосіб визначення симетричних автоколивань на основі гармонічної лінеаризації нелінійності. Нехай нелінійна система з однією нелінійністю $\Phi(x)$ має передаточну функцію лінійної частини

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

Тоді дана система може бути описана рівняннями:

$$\begin{cases} A(p)x = -B(p)y; \\ y = \Phi(x). \end{cases}$$

Так як лінійна частина має властивість фільтра, рішення відшукується приблизно у формі $x = a \sin \omega t$ з двома невідомими a і ω .

Після гармонічної лінеаризації: $y = \Phi(x) = [q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p]x$.

Тоді характеристичне рівняння системи можна представити у вигляді:

$$\left\{ A(p) + B(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \right\} x = 0.$$

Періодичний розв'язок рівняння відповідає парі чисто уявних коренів $\pm j\omega$. Тому для знаходження розв'язку підставимо в рівняння $p = j\omega$:

$$A(j\omega) + B(j\omega)[q(a) + jq'(a)] = 0.$$

Виділяємо дійсну і уявну частини у вигляді:

$$P(a, \omega) + jQ(a, \omega) = 0.$$

У результаті одержимо два алгебраїчних рівняння:

$$\begin{cases} P(a, \omega) = 0; \\ Q(a, \omega) = 0, \end{cases} \quad (25.1)$$

з яких і визначаються шукані амплітуда a і частота ω періодичного розв'язку

Визначивши, таким чином, періодичний розв'язок, треба дослідити його стійкість. Якщо він стійкий, то це означає автоколивальний процес. Нестійкий періодичний розв'язок відповідає нестійкому граничному циклу.

Для визначення умов стійкості періодичного розв'язку застосуємо такий спосіб. Перетворимо систему рівнянь (25.1) до наступного вигляду:

$$\begin{cases} a = \varphi(\omega) \\ \omega = f(a) \end{cases} \quad (25.2)$$

Підставляємо друге рівняння системи до першого рівняння:
 $a = \psi(a) = \varphi(f(a))$.

Це нелінійне алгебраїчне рівняння, розв'язок якого може бути знайдений як перетин бісектриси $y = a$ з кривою $y = \psi(a)$. Щоби визначити стійким або нестійким буде цей розв'язок можна застосувати метод точкового перетворення. Він полягає у наступному. Треба взяти на осі абсцис початкову точку a_0 спочатку зліва, а потім справа від точки перетину та прослідити хід точкового перетворення, як це показано стрілками на рис. 25.1, а-в. Якщо процес збігається з обох боків, то це буде стійкий граничний цикл, що відповідає автоколивальному режиму в системі (рис. 25.1, а-б). Якщо процес розбіжний (рис. 25.1, в), то це відповідає нестійкому граничному циклу.

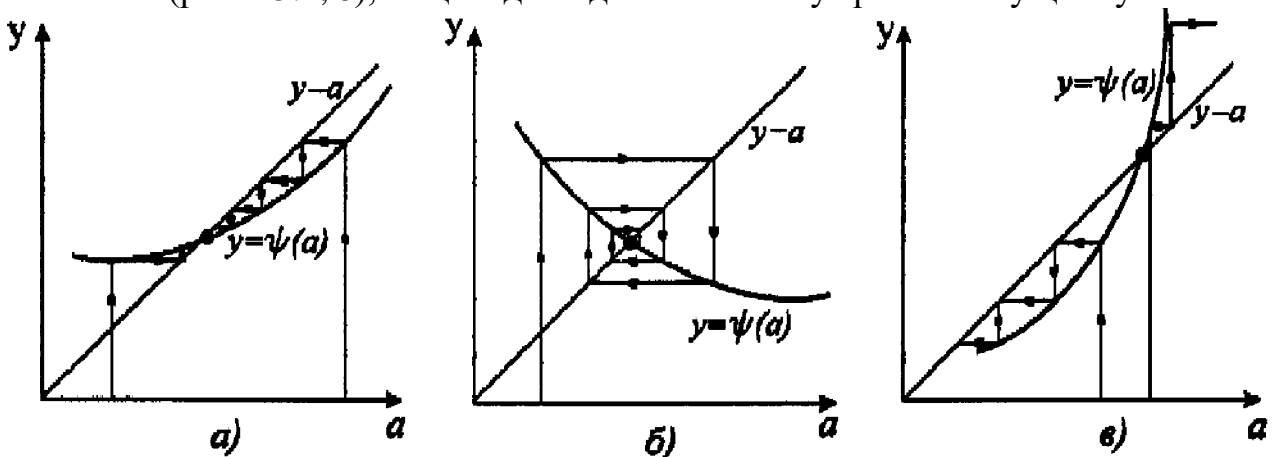


Рис. 25.1.

Як видно з наведених рисунків, розв'язок буде стійким, якщо $|\psi'| < 1$.
 Визначимо похідну $\psi'_a = \frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial f}{\partial a}$. Повертаючись до рівнянь (25.2) знаходимо

$$\begin{aligned} da &= \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \cdot d\omega; & \frac{da}{d\omega} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}; \\ d\omega &= \frac{\partial f}{\partial a} \cdot da; & \frac{d\omega}{da} &= \frac{\partial f}{\partial a}. \end{aligned}$$

Так як $P(a, \omega)$ та $Q(a, \omega)$ є неявними функціями, то частинні похідні визначаємо через диференціали

$$\begin{cases} dP = \frac{\partial P}{\partial a} da + \frac{\partial P}{\partial \omega} d\omega = 0 \\ dQ = \frac{\partial Q}{\partial a} da + \frac{\partial Q}{\partial \omega} d\omega = 0 \end{cases}.$$

З першого рівняння системи знаходимо $\frac{da}{d\omega} = -\frac{\partial P / \partial \omega}{\partial P / \partial a} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}$, а з другого

рівняння $\frac{d\omega}{da} = -\frac{\partial Q / \partial a}{\partial P / \partial \omega} = \frac{\partial f}{\partial a}$.

Підставляючи ці похідні у нерівність $|\psi'_a| < 1$, отримуємо:

$$\frac{\partial P / \partial \omega}{\partial P / \partial a} \cdot \frac{\partial Q / \partial a}{\partial P / \partial \omega} < 1 \quad \text{або} \quad \frac{\partial P / \partial \omega \cdot \partial Q / \partial a}{\partial P / \partial a \cdot \partial P / \partial \omega} < 1.$$

Тоді повинна виконуватись умова:

$$\frac{\partial P}{\partial a} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \omega} - \frac{\partial P}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial Q}{\partial a} > 0. \quad (25.3)$$

Усі похідні у виразі (25.3) визначаються для певного періодичного розв'язку (конкретних значень a та ω).

В додаток до цієї умови потрібно поставити вимогу, щоб у характеристичному рівнянні гармонічно лінеаризованої системи всі інші корені (крім використаної пари чисто уявних) мали від'ємні дійсні частини, тобто щоб багаточлен

$$\frac{A(p) + B(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right]}{(p - j\omega)(p + j\omega)} = \frac{A(p) + B(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right]}{p^2 + \omega^2}$$

задовольняв критерію Гурвіца (чи Михайлова). У випадку систем третього і четвертого порядку для цього досить вимагати лише додатності коефіцієнтів рівняння

$$A(p) + B(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] = 0.$$

Зазначимо, що визначення параметрів автоколивань a, ω спрощується у випадку однозначної непарно-симетричної нелінійності $y = \Phi(x)$. Тому що в цьому випадку коефіцієнт гармонічної лінеаризації, $q'(a) \equiv 0$, а характеристичне рівняння гармонічно лінеаризованої системи приймає наступний вигляд:

$$A(p) + B(p)q(a) = 0.$$

Після підстановки $p = j\omega$ і виділення дійсної і уявної частин багаточленів одержимо:

$$\begin{cases} A(j\omega) = P_A(\omega) + jQ_A(\omega); \\ B(j\omega) = P_B(\omega) + jQ_B(\omega). \end{cases}$$

Тоді можна записати:

$$\begin{cases} P_A(\omega) + P_B(\omega)q(a) = 0; \\ Q_A(\omega) + Q_B(\omega)q(a) = 0. \end{cases}$$

Ці два рівняння можна перетворити до вигляду:

$$\begin{cases} P_A(\omega)Q_B(\omega) - Q_A(\omega)P_B(\omega) = 0; \\ q(a) = -P_A(\omega)/P_B(\omega). \end{cases}$$

З першого рівняння визначаємо частоту ω періодичного розв'язку, а потім із другого рівняння знаходимо амплітуду a . Видно, що частота ω періодичного розв'язку в даному випадку не залежить від форми нелінійності і

визначається лише параметрами лінійної частини системи. У випадку петльової (неоднозначної) нелінійності ця властивість порушується, і буде мати місце загальний випадок рівнянь

$$\begin{cases} P(a, \omega) = 0; \\ Q(a, \omega) = 0. \end{cases}$$

Приклад. Провести дослідження нелінійної системи (рис. 25.2) методом гармонічної лінеаризації.

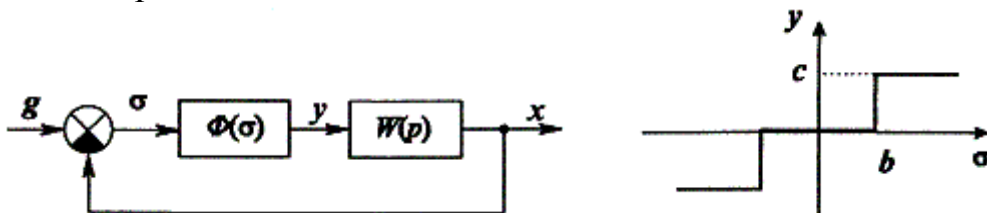


Рис. 25.2.

Рівняння лінійної частини
$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Система рівнянь для замкненої системи
$$\begin{cases} \sigma = g - x; \\ x = W(p)y; \\ y = \Phi(\sigma) \end{cases}$$

Так як виконується дослідження симетричного режиму автоколивань, то вхідний вплив $g = 0$. Коефіцієнти гармонічної лінеаризації при симетричних коливаннях визначаються наступним чином

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - (b/a)^2}, \quad a \geq b; \quad q'(a) = 0.$$

Гармонічно лінеаризоване рівняння замкненої системи буде мати вигляд:

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + Kq(a)]\sigma = 0.$$

Тоді характеристичне рівняння системи можна записати таким чином

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + Kq(a) = 0$$

Підставляємо до характеристичного рівняння $p = j\omega$ та виділяємо дійсну та уявну частини. В результаті отримаємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} P(a, \omega) = 0; \\ Q(a, \omega) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Kq(a) - (T_1 + T_2)\omega^2 = 0 \\ \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0 \end{cases}.$$

З другого рівняння системи визначаємо частоту періодичного розв'язку (можливих автоколивань) $\omega = 1/\sqrt{T_1 T_2}$. Підставляємо знайдене значення частоти ω до першого рівняння системи та знаходимо

$$q(a) = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right).$$

Для визначення амплітуди можливих автоколивань використовуємо графік залежності коефіцієнту $q(a)$ (рис.25.3).

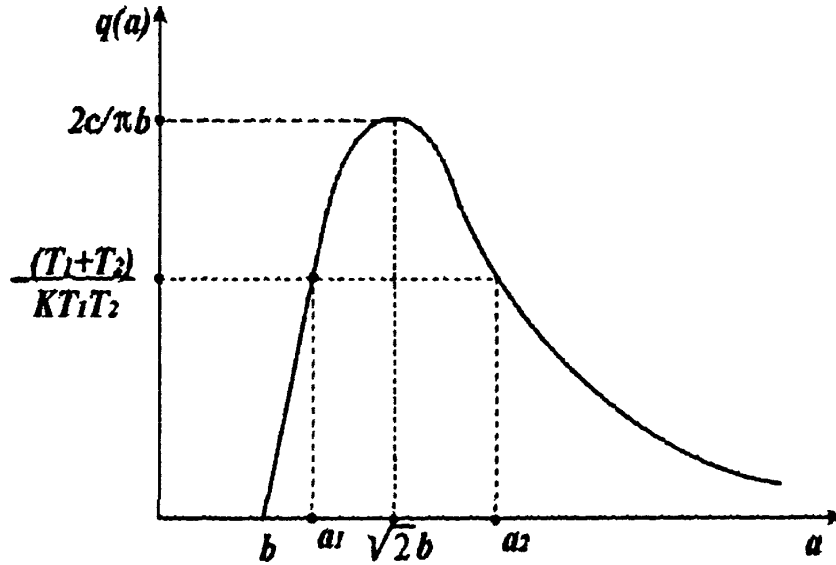


Рис. 25.3.

Як видно з рис. 25.3 можливі два різних значення амплітуди коливань a_1 та a_2 .

Тепер необхідно дослідити стійкість знайдених розв'язків. Для стійкості періодичних розв'язків необхідне виконання умови:

$$\frac{\partial P}{\partial a} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \omega} - \frac{\partial P}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial Q}{\partial a} > 0.$$

Визначаємо значення частинних похідних

$$\frac{\partial P}{\partial a} = K \frac{\partial q(a)}{\partial a}; \quad \frac{\partial P}{\partial \omega} = -2(T_1 + T_2)\omega < 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial \omega} = (1 - 3T_1T_2\omega^2) = -2 < 0.$$

Таким чином, необхідною буде умова

$$\frac{\partial P}{\partial a} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \omega} > 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial P}{\partial a} = K \frac{\partial q(a)}{\partial a} < 0.$$

Ця умова виконується лише для точки a_2 . Отже коливання з частотою $\omega = 1/\sqrt{T_1T_2}$ -та амплітудою a_2 стійкі, а з частотою $\omega = 1/\sqrt{T_1T_2}$ та амплітудою a_1 - нестійкі.

За допомогою гармонічної лінеаризації можна визначати не тільки параметри та стійкість автоколивань, але й дослідити умови, виникнення автоколивань у системі. Покажемо це на прикладі розглянутої системи. Так як $q(a) \leq 2c/\pi b$ то з рівняння

$$q(a) = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$$

можна визначити граничний коефіцієнт підсилення системи та умову появи автоколивань

$$K > K_{ep} = \frac{\pi b(T_1 + T_2)}{2cT_1T_2},$$

де K - коефіцієнт підсилення розімкненого кола лінійної частини системи.

Можна побудувати графіки залежності амплітуди коливань від коефіцієнта підсилення (для цього можна використати попередній рисунок). Якщо величину a розглядати як амплітуду коливань в перехідному процесі, то стрілками можна показати напрям зміни амплітуди в різних областях (рис. 25.4). При $K < K_{zp}$ стан рівноваги системи буде стійким при довільних початкових умовах. Якщо $K > K_{zp}$ то стан рівноваги системи буде стійким лише при малих відхиленнях (менших за a_1), а при більших відхиленнях виникають коливання з амплітудою a_2 .

Таким чином, у системі з зоною нечутливості має місце жорсткий запуск (тобто потрібен початковий поштовх з амплітудою $a > a_1$).

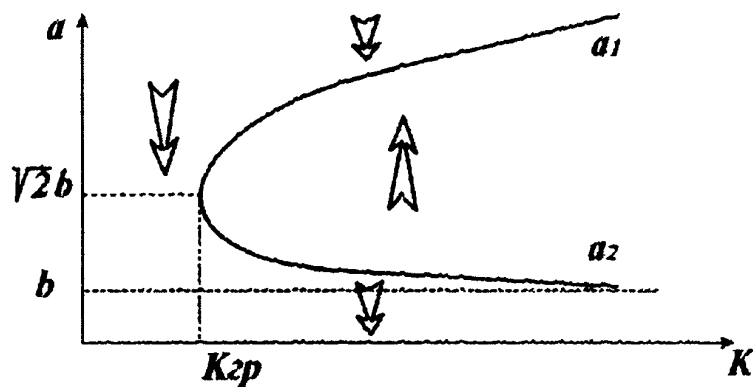


Рис. 25.4.

НЕСИМЕТРИЧНІ АВТОКОЛИВАННЯ

Несиметричні автоколивання можуть виникати в нелінійній системі (рис. 26.1) при впливі на неї деякого постійного сигналу $g(t) = \text{const}$, або при відсутності зовнішнього впливу за рахунок несиметричної нелінійності. Нелінійну систему в цьому випадку можна описати наступними рівняннями:

$$\begin{cases} X(p) = \frac{B(p)}{A(p)} [G(p) - Y(p)]; \\ y = \Phi(x). \end{cases}$$

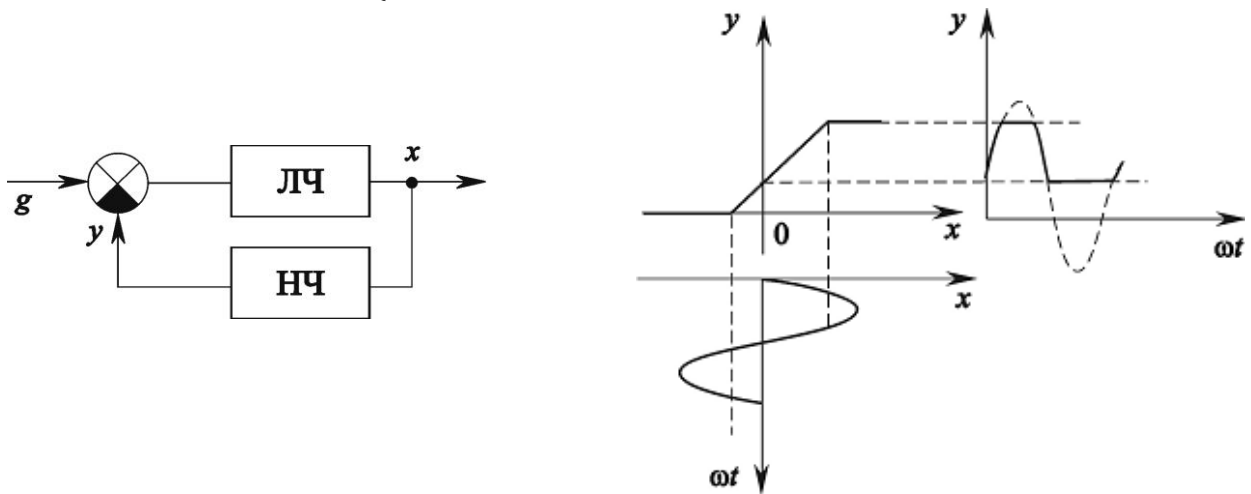


Рис. 26.1.

Періодичне розв'язок рішення при цьому відшукується у вигляді $x = a_0 + a \sin \omega t$. Гармонічна лінеаризація у випадку несиметричних коливань виконується відповідно до виразу

$$Y(p) = L\{\Phi(x)\} = \frac{\Phi_0(a_0, a)}{p} + \left[q(a_0, a) + \frac{q'(a_0, a)}{\omega} p \right] x'(p),$$

де a_0 — постійна складова; $q(a_0, a), q'(a, a)$ — коефіцієнти гармонічної лінеаризації; $x' = a \sin \omega t$.

Таким чином, $x = a_0 + x'$; $x'(p) = L\{x'\} = L\{a \sin \omega t\} = \frac{a\omega}{p^2 + \omega^2}$;

$$G(p) = \frac{g_0}{p}.$$

Розв'язок системи на основі лінеаризації визначається з виразу

$$B(p)G(p) = A(p)X(p) + B(p)Y(p)$$

або

$$B(p)G(p) = A(p) \left[\frac{a_0}{p} + x'(p) \right] + B(p) \left\{ \frac{\Phi_0(a_0, a)}{p} + \left[q(a_0, a) + \frac{q'(a_0, a)}{\omega} p \right] x'(p) \right\} =$$

$$= A(p) \left[\frac{a_0}{p} + \frac{a\omega}{p^2 + \omega^2} \right] + B(p) \left\{ \frac{\Phi_0(a_0, a)}{p} + \left[q(a_0, a) + \frac{q'(a_0, a)}{\omega} p \right] \frac{a\omega}{p^2 + \omega^2} \right\}$$

З цього виразу можна одержати рівняння для постійних і періодичних складових для чого необхідно помножити ліву і праву частини відповідно на p (спрямувавши $p \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$) або на $p^2 + \omega^2$ (замінивши $p \rightarrow j\omega$).

Тоді одержимо:

$$\begin{cases} A(0)a_0 + B(0)\Phi_0(a_0, a) = B(0)g(0); \\ A(j\omega) + B(j\omega)[q(a_0, a) + jq'(a_0, a)] = 0. \end{cases}$$

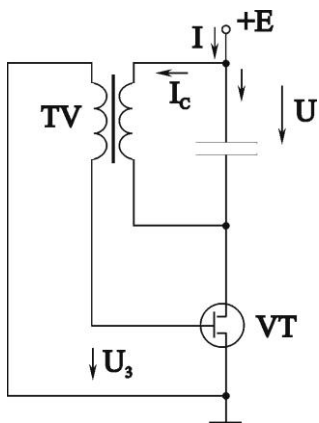
З отриманих рівнянь випливає, що постійна a_0 і періодична (a, ω) складові визначаються не окремо, а тільки шляхом спільного розв'язку цих рівнянь. Спочатку з першого рівняння визначається залежність $a_0 = f(a)$, яка потім підставляється у вираз для коефіцієнтів гармонічної лінеаризації $q(a_0, a)$ і $q'(a_0, a)$ для заданої нелінійності. Тоді виходять нові вирази для $q(a)$ і $q'(a)$, що включають залежність $a_0 = f(a)$. У результаті рівняння для періодичної складової приводиться до вигляду

$$A(j\omega) + B(j\omega)[q(a) + jq'(a)] = 0,$$

і надалі методика задачі зводиться до раніше розглянутої методики визначення a і ω .

Приклад. Дослідимо автоколивання в системі, зображеній на рис. 26.2. Рівняння, що описують процеси, у даній системі можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} I = I_L + I_C, & U_3 = nU, \\ I_L = \frac{U}{pL + r}; & I_C = pCU; I = \Phi(U_3), \end{cases}$$



де L — індуктивність обмотки; r — активний опір обмотки; C — ємність конденсатора; n — коефіцієнт трансформації.

Перетворимо вихідну систему рівнянь:

$$I = I_L + I_C = \frac{U}{pL + r} + pCU = \frac{p^2 LC + pCr + 1}{pL + r} U,$$

звідки одержуємо:

$$U = \frac{pL + r}{p^2 LC + pCr + 1} I,$$

Рис. 26.2.

або

$$U_3 = n \frac{pL + r}{p^2 LC + pCr + 1} I.$$

Нелінійність системи визначається характеристикою польового транзистора і має вигляд, показаний на рис. 26.3.

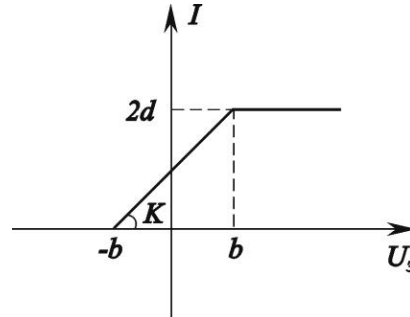


Рис. 26.3.

Так як постійна складова не передається в коло затвора, то коливання будуть симетричними. Раніше (див. приклад 3) нами був отриманий вираз для коефіцієнта гармонічної лінеаризації для даного типу нелінійності:

$$q(a) = \frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right), \quad a \geq b; \quad q'(a) = 0;$$

Рівняння, що описує гармонічно лінеаризовану систему, має вигляд:

$$\left[1 + pCr + p^2 LC - n(pL + r)q(a) \right] = 0,$$

причому $n > 0$, що відповідає позитивному зворотному зв'язку. Виділяючи дійсну і уявну частини в даному виразі, одержуємо

$$\begin{cases} P(a, \omega) = 1 - \omega^2 LC - q(a)nr = 0; \\ Q(a, \omega) = \omega Cr - n\omega Lq(a) = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння знаходимо: $q(a) = \frac{Cr}{nL}$.

Для визначення амплітуди автоколивань розв'яжемо дане рівняння графічно, як показано на рис. 100.

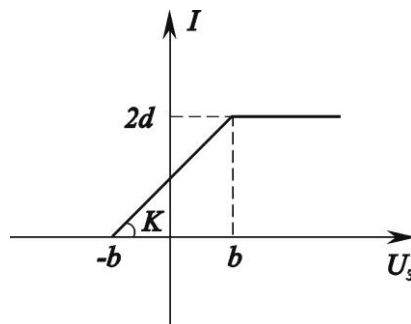


Рис. 26.4.

Частоту автоколивань знаходимо з першого рівняння, підставляючи в нього $q(a)$:

$$\omega = \sqrt{\frac{L - Cr^2}{L^2 C}}.$$

Перевіримо знайдене періодичне рішення на стійкість. Виділяємо частинні похідні:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)^* = -nr \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right) > 0 \text{ так як } \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right) < 0;$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^* = -2\omega LC < 0; \left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)^* = -nL \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right) > 0; \left(\frac{\partial Q}{\partial \omega}\right)^* = 0.$$

Таким чином:

$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^* > 0, \quad \text{або} \quad -nL \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right) 2\omega LC > 0.$$

Так як $(\partial q / \partial a) < 0$, ця умова виконується, якщо $n > 0$ (для позитивного зворотного зв'язку). При $n < 0$ (негативний зворотний зв'язок) дана умова виконуватися не буде, що відповідає нестійкому періодичному режиму.

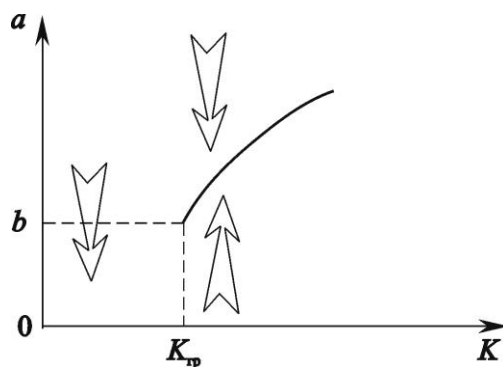


Рис. 26.5.

прагнуть до визначеного значення. При великих же початкових відхиленнях вони загасають до визначеного значення амплітуди a . Говорять, що в системі має місце "м'який" запуск.

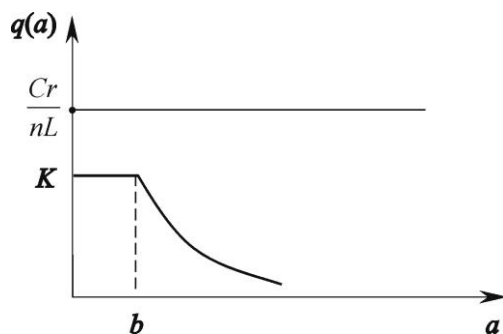


Рис. 26.6.

На рис. 26.5. зображена залежність амплітуди автоколивань від коефіцієнта K . Якщо величину a трактувати ширше (як амплітуду коливань у перехідному процесі), то стрілками можна показати напрямки зміни амплітуди в різних областях значень K . При $K > K_{гр}$, навіть при малих початкових відхиленнях у системі виникають коливання з наростаючою амплітудою (розбіжні), що

При K , менших ніж $K_{гр} = Cr/nL$, рівняння:

$$q(a) = \frac{Cr}{nL}$$

не має рішення (рис. 26.6) тобто автоколивання в системі не виникнуть.

Лекція 27. Частотний спосіб визначення симетричних коливань (метод гармонічного балансу). Одночастотні вимушені коливання

ЧАСТОТНИЙ СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ СИМЕТРИЧНИХ АВТОКОЛИВАНЬ

Розірнемо зворотний зв'язок у нелінійній системі, зображеній на рис. 27.1, а. Тоді будемо мати розірнену систему (рис. 27.1, б), у якій виділені нелінійна частина (НЧ) і лінійна частина (ЛЧ). Передаточна функція лінійної частини

$$W_L(p) = \frac{B(p)}{A(p)},$$

а передаточна функція лінеаризованої не лінійності:

$$W_H(p, a) = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p.$$

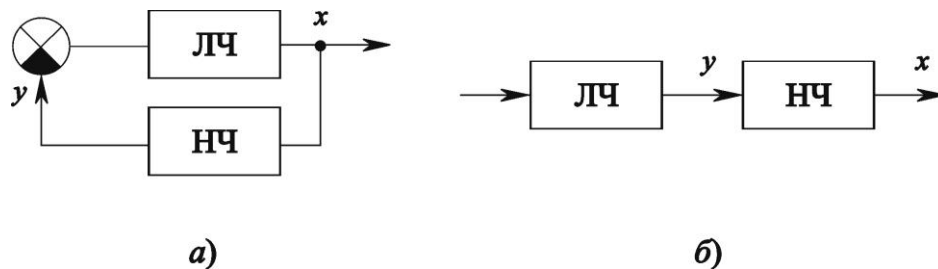


Рис. 27.1.

Тоді амплітудно-фазова частотна характеристика розірненого кола системи може бути зображена у вигляді

$$W(j\omega) = W_L(j\omega)W_H(a) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} [q(a) + jq'(a)],$$

де $W_H(a) = [q(a) + jq'(a)]$.

Періодичне розв'язок лінеаризованої системи виходить при наявності в характеристичному рівнянні замкненої системи пари чисто уявних коренів. При цьому, відповідно до критерію Найквіста, годограф АФЧХ $W(j\omega)$ проходить через точку $(-1; j0)$. Отже, періодичне рішення визначається рівністю:

$$W_L(j\omega)W_H(a) = -1 \quad \text{або} \quad W_L(j\omega) = -\frac{1}{W_H(a)}.$$

Дане рівняння визначає шукані амплітуду a і частоту ω періодичного розв'язку. Це рівняння розв'язується графічно у такий спосіб. На комплексній площині $U(\omega), V(\omega)$ будується АФЧХ лінійної частини $W_L(j\omega)$, а також

зворотна АФЧХ нелінійності, взята зі знаком мінус, $-1/W_H(a)$ (рис. 27.2, а). Точка В, у якій відбувається перетин $W_L(j\omega)$ і $-1/W_H(a)$, визначає величини a і ω причому значення a відраховується по кривій $-1/W_H(a)$, а значення ω — по кривій $W_L(j\omega)$.

Після визначення періодичного розв'язку необхідно досліджувати його стійкість. Як уже відзначалося, періодичний розв'язок має місце в тому випадку, коли АФЧХ розімкненого кола

$$W(j\omega, a) = W_L(j\omega)W_H(a)$$

проходить через точку $(-1; j0)$ (рис. 27.2, б). Дано амплітуді відхилення Δa . Система буде повертатися до періодичного розв'язку, якщо при $\Delta a > 0$ коливання загасають, а при $\Delta a < 0$ — розходяться. Таким чином, при $\Delta a > 0$ АФЧХ $W(j\omega, a)$ повинна деформуватися так, щоб критерій стійкості Найквіста виконувався, а при $\Delta a < 0$ — порушувався. Це відповідає тому, що на даній частоті ω повинна виконуватися умова

$$|W(j\omega, a)| = |W_L(j\omega)W_H(a + \Delta a)| < 1, \quad \Delta a > 0$$

або

$$|W_L(j\omega)| < \left| \frac{1}{W_H(a + \Delta a)} \right|.$$

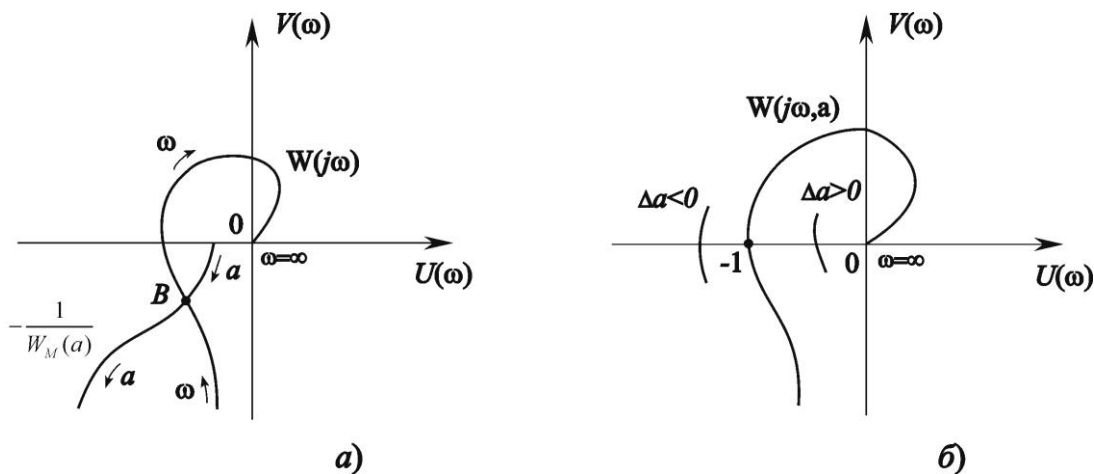


Рис. 27.2.

Звідси випливає, що позитивний відлік амплітуди a уздовж кривої $-1/W_H(a)$ (рис. 104, а) повинен бути спрямований зсередини області, що обмежується АФЧХ лінійної частини системи $W_L(j\omega)$, як показано стрілкою. У протилежному випадку періодичний розв'язок нестійкий.

Так, для випадку, показаного на рис. 27.3, точці 1 відповідають нестійкі коливання, а точці 2 — стійкі.

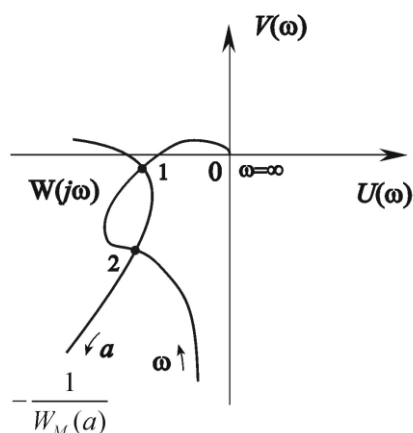


Рис. 27.3.

ОДНОЧАСТОТНІ ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

Задача дослідження вимушених коливань нелінійних систем досить складна, що обумовлено відсутністю суперпозиції окремих рішень, істотною зміною поведінки системи в залежності від амплітуди коливань, наявністю не єдиного сталого режиму і можливістю переходів з одного режиму на інший, особливостями вищих гармонік, субгармонік, комбінаційних частот і багатьма іншими факторами. Розглянемо випадок одночастотних вимушених коливань, тобто коливань нелінійної системи з частотою зовнішнього періодичного впливу, і знайдемо умови їх існування. Нехай є нелінійна система із зовнішнім впливом, заданим у вигляді $g(t) = A_m \sin \omega t$ (рис. 27.4).

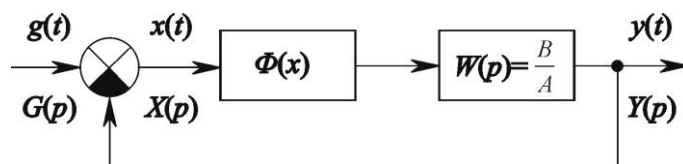


Рис. 27.4.

Рівняння динаміки системи має вигляд:

$$B(p)\{\Phi(x)\} + A(p)X(p) = A(p)G(p) .$$

Розв'язок для вимушених коливань відшукується у формі:

$$x = a \sin(\omega t + \psi) .$$

Тут частота ω задана, а невідомими параметрами є амплітуда a і фаза ψ .

Гармонічна лінеаризація нелінійності виконується по виразах, отриманих раніше для симетричних нелінійностей, при цьому покладається $\varphi = \omega t + \psi$:

$$L\{\Phi(x)\} = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] X(p) .$$

Тоді рівняння системи приймає вигляд:

$$\left\{ B(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] + A(p) \right\} a \frac{\omega \cos \psi + p \sin \psi}{p^2 + \omega^2} = A(p) A_m \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Для визначення періодичного розв'язку домножимо ліву і праву частини на $p^2 + \omega^2$ та підставимо в це рівняння $p = j\omega$:

$$\{B(j\omega)[q(a) + q'(a)j] + A(j\omega)\}a(\cos \psi + j \sin \psi) = A(j\omega)A_m,$$

або

$$\{B(j\omega)[q(a) + jq'(a)] + A(j\omega)\}a\ell^{j\psi} = A(j\omega)A_m.$$

Перетворимо цей вираз:

$$\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = -\frac{1}{W_H(a)} + \frac{A_m \ell^{-j\psi}}{a W_H(a)}, \text{ де } W_H(a) = [q(a) + jq'(a)].$$

Побудуємо АФЧХ лінійної частини системи $W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$ і характеристику $-1/W_H(a)$. Відзначимо на частотній характеристиці лінійної частини $W(j\omega)$ точку, що відповідає частоті зовнішнього впливу ω (рис. 27.5).

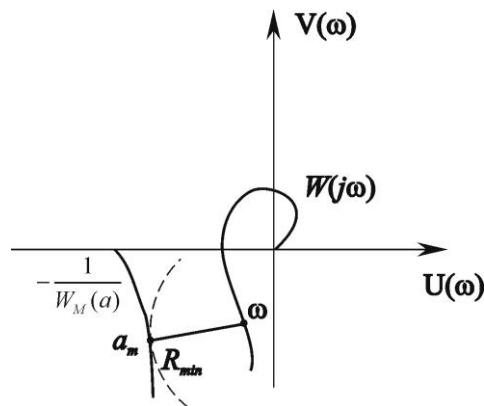


Рис. 27.5.

Мінімальна відстань R_{\min} від цієї точки до від'ємного зворотного коефіцієнта гармонічної лінеаризації $-1/W_H(a)$ визначається величиною радіуса окружності з центром у точці ω , дотичної до $-1/W_H(a)$. Нехай цей дотик має місце в точці $a = a_m$. Тоді

$$R_{\min} = \left| \frac{A_m \ell^{-j\psi}}{a_m W_H(a_m)} \right| = \frac{A_{m \text{ пор}}}{a_m \sqrt{q^2(a_m) + q'^2(a_m)}},$$

де $A_{m \text{ пор}}$ — граничне значення амплітуди зовнішнього задавального впливу. При $A_m < A_{m \text{ пор}}$ вимушені коливання частоти ω неможливі. При $A_m > A_{m \text{ пор}}$ можливо існування вимушених коливань частоти ω , причому амплітуда цих

коливань не може бути менше a_m . Граничне значення $A_{m \text{ пор}}$ залежить від частоти зовнішнього впливу. Якісно вигляд цієї залежності зображений на рис. 27.6, а.

Якщо частотна характеристика $W(j\omega)$ і від'ємний зворотний коефіцієнт гармонічної лінеаризації $-1/W_H(a)$ перетинаються (рис. 27.6, б), то в системі можливі автоколивання частоти ω_a й амплітуди a_0 . У цьому випадку залежність граничного значення $A_{m \text{ пор}}$ від частоти вимушених коливань має вигляд, показаний на рис. 27.6, в. При $\omega = \omega_a$ граничне значення обертається в нуль. Область існування вимушених коливань розташована над цією кривою. При $A_m \geq A_{m \text{ пор}}$ в нелінійній системі зовнішній періодичний вплив частоти ω придушує коливання частоти ω_a , які раніше існували в системі. Цей режим називається режимом примусової синхронізації, чи захоплюванням. У лінійних системах частотні характеристики $W(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ не залежать від амплітуди вхідного сигналу. У нелінійній системі частотні характеристики можуть істотно залежати від амплітуди вхідного сигналу A_m . Тому, у загальному випадку, виходить сім'я частотних характеристик замкненої системи по першій гармоніці (рис. 108, з). При досить високій частоті ω амплітуда вимушених коливань A_m може бути зроблена досить малою. Тому часто при $\omega \gg \omega_a$ режим захоплювання використовується для придушення автоколивань.

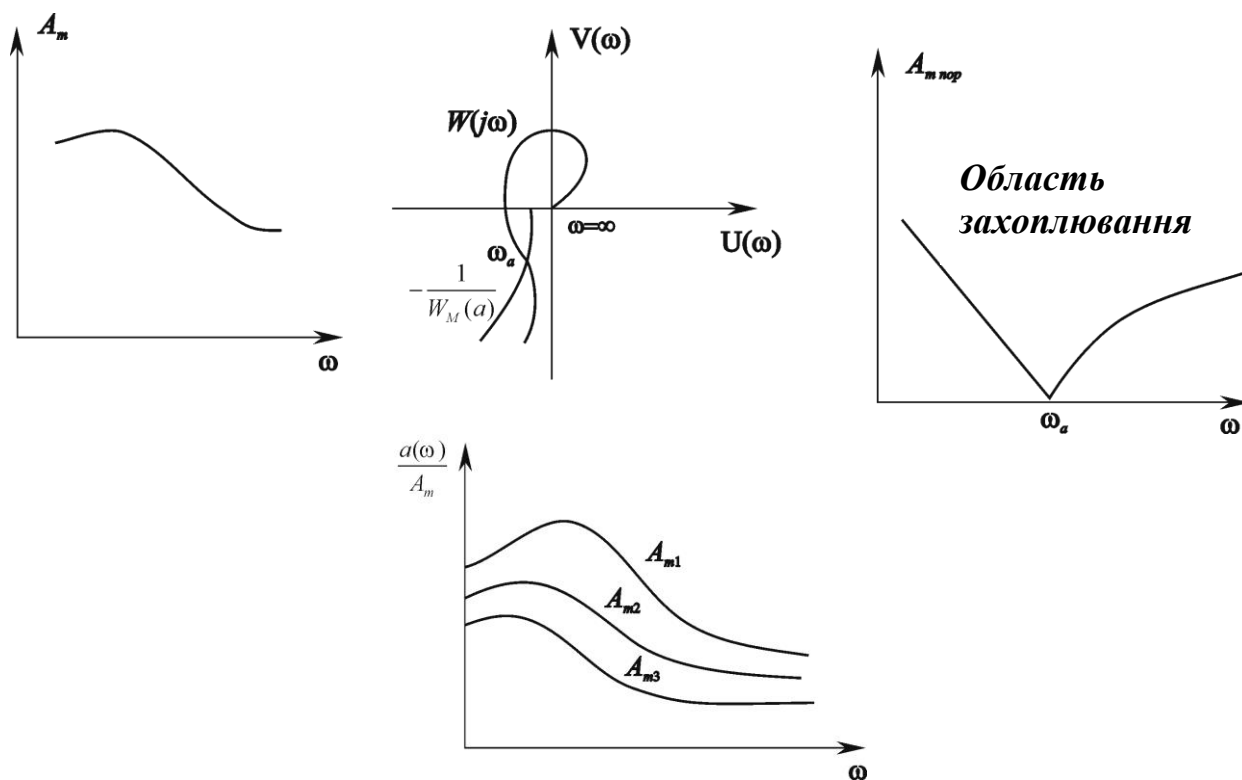


Рис. 27.6.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М: Наука, 1972. – 768 с.
2. Теория автоматического управления: ч. 1. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. – М.; Высш.шк., 1986. – 368 с.
3. Теория автоматического управления: ч.2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. – М: Высш.шк., 1986. – 504 с.
4. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1978. – 256 с.
5. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1979. – 254 с.
6. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. – М: Машиностроение, 1985. – 536 с.
7. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1977. – 560 с.
8. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. – М: Физматгиз, 1963. – 968 с.
9. Математические основы теории автоматического регулирования, т. 2. Изд. 2-е, доп. Под ред. Б.К. Чемоданова. Учеб. пособие для втузов. М.: Высш. шк., 1977. – 454 с.
10. Справочник по теории автоматического управления/ Под ред. А.А. Красовского. – М: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1987. – 712 с.